UEM
Universidade Estadual de Maringá

PCM
PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

FLÁVIA HISAYO RIBEIRO MATSUO

ENSINO-APRENDIZAGEM DE MÁXIMO DIVISOR COMUM DE NÚMEROS NATURAIS VIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

MARINGÁ – PR

2024

FLÁVIA HISAYO RIBEIRO MATSUO

ENSINO-APRENDIZAGEM DE MÁXIMO DIVISOR COMUM DE NÚMEROS NATURAIS VIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática.
Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carlos de Proença

MARINGÁ - PR

2024

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

Matsuo, Flávia Hisayo Ribeiro

M434e Ensino-aprendizagem de máximo divisor comum de número naturais via resolução de problemas / Flávia Hisayo Ribeiro Matsuo. -- Maringá, PR, 2025.
136 f. : il. color., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carlos de Proença.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, 2025.

1. Ensino fundamental - Ensino-Aprendizagem de matemática. 2. Ensino-Aprendizagem de matemática. 3. Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP). 4. Resolução de problemas - Ensino fundamental . I. Proença, Marcelo Carlos de, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática. III. Título.

CDD 23.ed. 507

Márcia Regina Paiva - CRB-9/1267

FLÁVIA HISAYO RIBEIRO MATSUO

Ensino-Aprendizagem de Máximo Divisor Comum de Números Naturais via Resolução de Problemas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em *Ensino de Ciências e Matemática.*

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Carlos de Proença
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Profa. Dra. Tania Teresinha Bruns Zimer
Universidade Federal do Paraná – UFPR

Profa. Dra. Ligia Bittencourt Ferraz de Camargo
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Maringá, 05 de fevereiro de 2025.

Dedico este trabalho a Deus por me guiar nesta caminhada e à minha família por me apoiar em todos os momentos e me incentivar a buscar sempre o aprimoramento profissional.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e a Nossa Senhora Aparecida, por estarem sempre comigo, me iluminando, abençoando e me conduzindo, com coragem, força e fé, permitindo que eu ultrapassasse os obstáculos encontrados no caminho.

Aos meus pais Nelson e Inez por estarem sempre presentes em minha vida, por me incentivar nos estudos, apoiar minhas realizações, compreender minha ausência em alguns momentos e por proporcionar condições para que eu trilhasse esse caminho.

Às minhas irmãs Bianca e Eduarda por estarem ao meu lado e me ajudarem principalmente a manter a saúde emocional equilibrada.

Ao meu noivo Guilherme por ser meu parceiro, ouvir pacientemente minhas ideias, dúvidas e reclamações, me ajudar com as novas tecnologias e me apoiar em todas as fases do mestrado, mesmo estando em cidades diferentes.

Ao Grupo de Estudos em Resolução de Problemas na Educação Matemática – GERPEM, pela oportunidade de elaborar artigos de forma colaborativa e pelas valiosas contribuições à minha pesquisa e formação profissional.

Ao meu orientador doutor Marcelo Carlos de Proença pelas orientações e sugestões, colaborando para a melhoria da minha pesquisa.

A todos os professores, colegas e secretária do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática (PCM) que tive o privilégio de conhecer, por me ajudarem em vários momentos e em vários aspectos, além de contribuírem para minha formação pessoal e profissional.

À professora Andrea Rubia Ferreira por me ceder algumas de suas aulas para realizar a pesquisa e me dar suporte e colaborar com as minhas ideias.

Aos alunos participantes desta pesquisa, por se disponibilizarem a participar desta etapa da minha formação.

Aos professores Tania Zimer e Wilian Travassos por aceitarem avaliar meu trabalho, pela dedicação e preciosas contribuições na qualificação. Agradeço também à professora Lígia Camargo, que prontamente aceitou o convite para integrar a banca de defesa.

À CAPES, agradeço pelo apoio financeiro durante todo o curso, pois o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Por fim, agradeço a todos e todas que contribuíram direta ou indiretamente com esta pesquisa, e mesmo que não tenha citado nomes, guardo no coração. Meu muito obrigada!

RESUMO

A presente pesquisa, de natureza qualitativa, teve como objetivo analisar as compreensões de alunos de uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental sobre o Ensino-Aprendizagem do Máximo Divisor Comum (MDC) de números naturais, por meio da Resolução de Problemas. Para tanto, foi elaborada e implementada uma proposta de ensino fundamentada nos pressupostos do Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP) para uma turma de 30 alunos do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do estado do Paraná. Nesta pesquisa, os dados foram constituídos pelas resoluções dos alunos, respostas de dois questionários, gravações de áudio das aulas e diário de aula, sendo analisados conforme a metodologia da Análise de Conteúdo. Os resultados evidenciam que, de modo geral, os alunos apresentam dificuldades nas etapas de resolução de problemas, especialmente no que diz respeito à compreensão e à interpretação dos termos do enunciado, bem como à sua tradução para a linguagem matemática. A estratégia mais utilizada foi a média aritmética, embora inadequada para a resolução da situação proposta. Os alunos demonstraram conhecimentos prévios malformados e se expressaram de maneira inadequada. No entanto, entenderam que o ponto em comum entre as estratégias utilizadas envolvia a operação de divisão. Além disso, 11 alunos mostraram compreender a relação entre a estratégia utilizada e o conteúdo matemático do MDC, enquanto os demais indicaram que estavam em processo de desenvolvimento dessa compreensão. Portanto, o EAMvRP contribuiu para a compreensão dos alunos sobre o MDC de números naturais, além de fomentar sua participação, comprometimento, trabalho coletivo e cooperativo, postura ativa e reflexiva, e o desenvolvimento da comunicação. Os alunos também perceberam que não existe uma única maneira de resolver situações matemáticas.

Palavras-chave: Ensino Fundamental; divisores; ensino-aprendizagem de Matemática.

ABSTRACT

This qualitative research aimed to analyze the understanding of students in a sixth-grade elementary school class regarding the teaching and learning of the Greatest Common Divisor (GCD) of natural numbers through Problem Solving. To achieve this, a teaching proposal was designed and implemented based on the principles of Teaching-Learning Mathematics through Problem Solving (EAMvRP) for a class of thirty sixth-grade students at a public school in the state of Paraná. In this research, the data consisted of the students' solutions, responses to two questionnaires, audio recordings of the classes, and class diaries, all of which were analyzed using Content Analysis. The results indicate that, in general, the students faced difficulties at various stages of problem-solving, particularly in understanding and interpreting the terms in the problem statement and translating them into mathematical language. The most commonly used strategy was the arithmetic mean, which, however, proved inadequate as it did not help resolve the problem. The students demonstrated poorly formed prior knowledge and expressed themselves inadequately, but they did understand that the common element between the strategies used was division. Additionally, 11 students showed an understanding of the relationship between the strategy employed and the mathematical concept of GCD, while the others were still in the process of developing this understanding. Therefore, the EAMvRP contributed not only to the students' understanding of the GCD of natural numbers but also to their participation, commitment, collective and cooperative work, active and reflective engagement, communication skills, and the recognition that there is more than one way to solve mathematical problems.

Keywords: Elementary School; divisors; teaching-learning Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Etapas do processo de resolução de problemas..... 24
Figura 2 - Esquema do trabalho por meio da sequência de ações..... 33
Figura 3 - Etapas de seleção das produções acadêmicas..... 50
Figura 4 - Resolução do grupo A (aluno A5)..... 80
Figura 5 - Apresentação da resolução do grupo B..... 82
Figura 6 - Resolução do grupo C (aluno C3)..... 85
Figura 7 - Resolução do grupo D (aluno D3)..... 86
Figura 8 - Apresentação da resolução do grupo D..... 86
Figura 9 - Resolução do grupo E (aluno E3)..... 88
Figura 10 - Apresentação da resolução do grupo E..... 89
Figura 11 - Resolução do grupo F (aluno F3)..... 91
Figura 12 - Resolução do grupo G (aluno G2)..... 92
Figura 13 - Erro de cálculo do aluno A2..... 94
Figura 14 - Erros de cálculos dos alunos B2 e B3..... 95
Figura 15 - Erros de cálculos dos alunos C1, C2 e C4..... 96
Figura 16 - Divisão usando a barra lateral pelo aluno D2..... 96
Figura 17 - Erro de cálculo do aluno F3..... 97
Figura 18 - Exemplo de resposta de acordo com a pergunta e o contexto..... 99
Figura 19 - Exemplo de prova real do aluno F1..... 101
Figura 20 - Respostas do questionário 1 com explicação das estratégias utilizadas (dos alunos A2 e B5, respectivamente)..... 104
Figura 21 - Respostas do questionário 1 com mais de um ponto em comum (dos alunos D3, B4 e A5, respectivamente)..... 106
Figura 22 - Respostas do questionário 1 sendo a divisão o ponto em comum (dos alunos A1, E5, F2 e E2, respectivamente)..... 107
Figura 23 - Articulação..... 109
Figura 24 - Respostas que consideraram mais fácil a estratégia do grupo (dos alunos E1, F1, A2 e D2, respectivamente)..... 111
Figura 25 - Resposta da primeira categoria (do aluno C3)..... 113
Figura 26 - Respostas da segunda categoria (dos alunos A4 e F2, respectivamente).. 113
Figura 27 - Respostas da terceira categoria (dos alunos A2, A5 e D2, respectivamente)..... 114
Figura 28 - Respostas da quarta categoria (dos alunos G2, B4 e C2, respectivamente)..... 116

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Tipos de estratégias 29,30
Quadro 2 - Fases de resolução de problemas segundo Polya 31
Quadro 3 - Produções acadêmicas encontradas (EAMvRP) 36
Quadro 4 - Produções acadêmicas selecionadas 36
Quadro 5 - Definições encontradas em livros didáticos 46
Quadro 6 - Produções acadêmicas encontradas (MDC) 50,51
Quadro 7 - Situação de Matemática 60
Quadro 8 - Possíveis estratégias 62,63
Quadro 9 - Tipos de conhecimentos 64
Quadro 10 - Possíveis erros, dúvidas e respostas 65
Quadro 11 - Questionário 1 66
Quadro 12 - Articulação 67
Quadro 13 - Questionário 2 68
Quadro 14 - Dificuldades na etapa de Representação 75
Quadro 15 - Estratégias iniciais e finais 93
Quadro 16 - Erros nos conhecimentos procedimentais 98
Quadro 17 - Exemplos de prova real dos alunos E5 e E3, respectivamente 100
Quadro 18 - Monitoramento dos grupos 102

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Síntese dos resultados obtidos na busca 49

Tabela 2 - Compreensões sobre os pontos em comum das estratégias 102

Tabela 3 - Impressões sobre as estratégias utilizadas 108

Tabela 4 - Entendimentos sobre a relação entre as estratégias e o conteúdo 112

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AC - Análise de Conteúdo

ASC - Aprendizagem Significativa Crítica

BDTD - Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

COPEP - Comitê Permanente de Ética em Pesquisa com Seres Humanos

CREP - Currículo da Rede Estadual Paranaense

DOI - *Digital Object Identifier*

EAMvRP - Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas

EJA - Educação de Jovens e Adultos

EUA - Estados Unidos da América

GERPEM - Grupo de Estudos em Resolução de Problemas na Educação Matemática

MDC - Máximo Divisor Comum

MMC - Mínimo Múltiplo Comum

NCTM National Council of Teachers of Mathematics

OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

OCM - Olimpíada Cearense de Matemática

PCM - Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PNDL - Plano Nacional do Livro Didático

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

RP - Resolução de Problemas

TCLE - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TALE - Termo de Assentimento Livre e Esclarecido

SUMÁRIO

TRAJETÓRIA ACADÊMICA **15**
INTRODUÇÃO **17**
1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS **20**
1.1 Um breve histórico sobre a resolução de problemas 20
1.2 Diferença entre problema e exercício 23
1.3 Etapas do processo da resolução de problemas 24
1.4 Estratégias de resolução 26
1.5 Abordagens de ensino da resolução de problemas 30
1.6 Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas 32
1.7 Estudos utilizando o EAMvRP 35
2 ENSINO DO MÁXIMO DIVISOR COMUM **45**
2.1 Informações históricas acerca do MDC 45
2.2 MDC em documentos oficiais 47
2.3 Revisão bibliográfica sobre Ensino com RP e MDC 48
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS **58**
3.1 Natureza e modalidade da pesquisa 58
3.2 Participantes e contexto da pesquisa 58
3.3 Instrumentos e técnicas de produção de dados 59
3.4 Proposta de ensino e planejamento 60
3.5 Procedimentos de produção dos dados 68
3.6 Procedimentos para análise dos dados 70
4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS **74**
4.1 Eixo 1 - Dificuldades dos alunos no processo de resolução de problemas e as suas estratégias de resolução 75
4.1.1 Representação 75
4.1.2 Planejamento 79
4.1.3 Execução 93
4.1.4 Monitoramento 99
4.2 Eixo 2 - Compreensões dos alunos sobre o MDC de números naturais 102
4.2.1 Compreensões dos alunos sobre os pontos em comum das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos 103
4.2.2 Impressões dos alunos sobre as estratégias 107

4.2.3 Compreensões dos alunos da relação entre as estratégias utilizadas e o conteúdo de MDC.... 112
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 117
REFERÊNCIAS 121
ANEXO 1 - PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP 129
APÊNDICE A - TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 133
APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 134
APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO 1 135
APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO 2 136

TRAJETÓRIA ACADÊMICA

Para iniciar a redação desta dissertação, compartilho um pouco sobre minha trajetória acadêmica. Ingressei no curso de graduação em Matemática da Unesp, campus de São José do Rio Preto, em 2018. Ao final do primeiro ano, optei pela modalidade Licenciatura e, por isso, realizei a transferência para o campus de Presidente Prudente. Dessa forma, cursei os outros três anos da graduação em minha cidade natal e, em março de 2022, recebi o grau de Licenciada em Matemática.

No terceiro ano do curso, realizei a disciplina de Estágio Supervisionado Obrigatório I de forma remota, devido à pandemia de Covid-19. Nesse mesmo ano, tive a oportunidade de participar do Programa Institucional de Residência Pedagógica, onde tive meu primeiro contato com a resolução de problemas. Esse tema despertou grande interesse, pois percebi que a metodologia utilizada favoreceu um melhor entendimento dos alunos durante atividades que envolviam a operação de multiplicação de números inteiros. As atividades também foram realizadas de forma remota, em virtude do contexto pandêmico em que estávamos inseridos.

Em 2021, fui aprovada em um processo seletivo para a vaga de monitora voluntária da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral IV, o que contribuiu significativamente para meu desenvolvimento docente, pois me proporcionou oportunidades de me preparar para atividades de ensino. Nesse mesmo ano, também fui convidada a participar do Programa de Formação Complementar. Ao final do curso, incentivada por meus professores, inscrevi-me em dois processos seletivos para o mestrado: um em Matemática e outro em Matemática Aplicada e Computacional.

Em 2022, fui aprovada no mestrado em Matemática. No entanto, percebi que não estava satisfeita com o foco exclusivo na parte pura da Matemática e decidi interromper os estudos. Em seguida, concentrei-me na elaboração de um pré-projeto para me inscrever no processo seletivo do mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM), sendo aprovada para ingresso em 2023. A partir daí, comecei a me aprofundar nas pesquisas em Educação Matemática, com ênfase na abordagem de resolução de problemas.

Durante os anos do mestrado, aprendi imensamente sobre pesquisa científica com os professores do programa de pós-graduação, com os colegas do Grupo de Estudos em Resolução de Problemas na Educação Matemática (GERPEM), do qual faço parte, e com os colegas do programa em geral. A oportunidade de estar em sala de aula como professora e pesquisadora foi enriquecedora para minha vida profissional, especialmente porque até então não havia

ministrado aulas presenciais, já que tive o privilégio de me dedicar exclusivamente aos estudos. Além disso, foi a primeira vez que analisei dados qualitativamente.

Ao longo da pesquisa, enfrentei dificuldades, especialmente na metodologia de análise, mas perseverei e, com o auxílio de algumas pessoas, consegui chegar até aqui. Não pretendo parar por aqui; desejo continuar me aprofundando nos estudos para aprimorar o processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática e proporcionar uma Educação Matemática de qualidade para crianças, jovens e adultos.

INTRODUÇÃO

A pesquisa sobre a tendência pedagógica baseada na resolução de problemas não é atual e, devido à sua relevância no contexto educacional em que vivemos, deve continuar sendo desenvolvida por muitos anos. Em âmbito nacional, há vários estudos que mostram a importância de abordar a resolução de problemas no processo de ensino-aprendizagem, como Allevato e Onuchic (2014), Sousa e Proença (2019), Oliveira e Proença (2020), Rozario (2022), Akamine e Proença (2022) e Travassos (2023), assim como em âmbito internacional, como, por exemplo, Schroeder e Lester Junior (1989), Fi e Degner (2012), Pruner e Liljedahl (2021), Marchant, Cornejo e Felmer (2023) e Felmer (2023).

Na presente pesquisa, abordamos a resolução de problemas no processo de ensino-aprendizagem do conteúdo matemático Máximo Divisor Comum (MDC) de números naturais. No atual documento norteador do currículo brasileiro, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), a resolução de problemas, assim como a modelagem e a investigação matemática, é considerada uma "forma privilegiada da atividade matemática, motivo pelo qual é, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental" (Brasil, 2018, p. 266).

No mesmo documento, o conteúdo MDC de números naturais está contemplado na Unidade Temática "Números", que tem como objetivo principal o desenvolvimento do pensamento numérico. Nesse contexto, uma das habilidades a ser desenvolvida nos alunos é a de “resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir o máximo divisor comum [...]” (Brasil, 2018, p. 307).

Uma vez que a presente pesquisa se situa no contexto de alunos do estado do Paraná, o documento *Referencial Curricular do Estado do Paraná* (Paraná, 2018) aponta os seguintes objetivos de aprendizagem na Unidade Temática "Números e Álgebra": “[...] Determinar o MMC e MDC de números naturais. [...] Resolver e elaborar problemas envolvendo MMC e MDC de números naturais” (Paraná, 2018, p. 859).

Embora a BNCC destaque habilidades que envolvem a resolução de problemas, o documento não especifica como fazer isso na prática em sala de aula, ou seja, não apresenta “[...] sugestões sobre como abordar o processo matemático de resolução de problemas para levar os alunos a aprenderem Matemática” (Proença; Campelo; Santos, 2022, p. 12). Nesse sentido, visando suprir essa lacuna, Proença (2018) apresenta uma proposta denominada Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP), que se

configura como uma possibilidade de trabalhar com a resolução de problemas no ensino de Matemática.

A partir de um levantamento bibliográfico sobre estudos relacionados ao ensino de MDC por meio da resolução de problemas, que será detalhado adiante, encontramos 11 pesquisas. Além disso, também são poucos os estudos que tratam exclusivamente do ensino de MDC (Matsuo; Oliveira; Proença, 2024). Por não encontrarmos pesquisas que utilizam um problema como ponto de partida para o ensino do MDC em sala de aula, nossa pesquisa se faz necessária, uma vez que utilizamos um problema para introduzir o referido conteúdo matemático, com base na abordagem do EAMvRP, proposta por Proença (2018).

Assim, buscamos responder à seguinte questão de pesquisa: que compreensões de alunos de uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental são evidenciadas quando se trabalha o Ensino-Aprendizagem do Máximo Divisor Comum de números naturais via Resolução de Problemas?

Desse modo, o objetivo do presente estudo é analisar as compreensões de alunos de uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental ao trabalhar o Ensino-Aprendizagem do Máximo Divisor Comum de números naturais por meio da Resolução de Problemas. Este objetivo se desdobra em três objetivos específicos: 1) Analisar as dificuldades dos alunos no processo de resolução do problema; 2) Analisar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema; 3) Identificar as compreensões dos alunos acerca das estratégias de resolução e da forma matemática do MDC.

Assim, esta dissertação está estruturada em cinco seções, além da trajetória e da introdução. Na primeira seção, abordaremos os princípios teóricos da resolução de problemas, apresentando um breve histórico sobre essa teoria, a diferença entre problema e exercício, as etapas do processo de resolução de problemas, além de algumas estratégias de resolução, as abordagens de ensino, o Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP) e algumas experiências com essa proposta em sala de aula.

Em seguida, discutiremos o ensino do conteúdo matemático MDC, expondo algumas informações históricas, o que os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN indicavam, e apresentando o que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o Referencial Curricular do Paraná e o Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP) apresentam sobre o tema. Também será realizada uma revisão bibliográfica, baseada nos pressupostos da revisão sistemática da literatura de Mendes e Pereira (2020), com a finalidade de mapear as pesquisas sobre o MDC e a Resolução de Problemas, o que fundamentou nosso estudo.

A terceira seção descreve os encaminhamentos metodológicos empregados. Inicialmente, discutiremos a natureza e a modalidade da pesquisa, os participantes e o contexto, os instrumentos e as técnicas para a produção dos dados, além da construção da proposta de ensino e seu planejamento. Ademais, explicaremos os procedimentos de produção e análise dos dados.

Na quarta seção, desenvolveremos a análise e discussão dos dados, na qual abordaremos as dificuldades dos alunos no processo de resolução do problema, as estratégias utilizadas e as compreensões dos alunos sobre as estratégias e o conteúdo de MDC. Por fim, apresentaremos nossas considerações finais, destacando os principais resultados da pesquisa, suas implicações e reflexões.

1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, inicialmente, serão discutidos os princípios teóricos da resolução de problemas e, em seguida, será abordado o ensino por meio da resolução de problemas. Ou seja, começaremos com um breve histórico, em seguida, apontaremos a diferença entre os termos "problema" e "exercício", as etapas da resolução de problemas e algumas estratégias de resolução. Após tratar desses aspectos, apresentaremos três diferentes abordagens de ensino da resolução de problemas, uma forma de trabalhar com a resolução de problemas no ensino de Matemática e publicações a respeito desse trabalho em sala de aula. Assim, nosso objetivo é que o leitor, primeiramente, compreenda os aspectos teóricos e entenda o que é a resolução de problemas, para, posteriormente, entender como ela pode ser abordada no ensino de Matemática.

1.1 Um breve histórico sobre a resolução de problemas

Desde os primórdios da história os seres humanos resolvem problemas, visto que

> Os problemas serviram de motor para impulsionar o desenvolvimento e a evolução da espécie nos mais variados campos, os primeiros homens tiveram que desenvolver métodos para resolver problemas da vida como, por exemplo, localizar-se no tempo e no espaço e, também, tentar descrever e explicar o mundo físico. Eles criaram maneiras de comparar, classificar e ordenar, de medir, quantificar e inferir elementos fundamentais que a tradição da cultura nomeou de Matemática (Huanca, 2008, p. 1).

Desse modo, De acordo com Stanic e Kilpatrick (1989), os problemas estão presentes desde pelo menos os tempos dos antigos egípcios, chineses e gregos. Temos, por exemplo, o Papiro de Ahmes, um manuscrito matemático egípcio composto por vários problemas. No entanto, segundo os autores, a preocupação em desenvolver a capacidade de resolução de problemas em sala de aula é recente.

Até meados do século XX, a resolução de problemas consistia apenas em resolvê-los. Com o passar do tempo, psicólogos, sociólogos e educadores começaram a se mostrar insatisfeitos com essa abordagem (Stanic; Kilpatrick, 1989). Nesse sentido, em 1942, o matemático e pesquisador George Polya foi reconhecido como a maior autoridade em resolução de problemas e, embora tenha publicado sua obra *A Arte de Resolver Problemas* em 1945 nos Estados Unidos da América (EUA), sua pesquisa só ganhou força a partir do final da década de 1960 (Morais; Onuchic, 2014). Essa obra enfatizava quatro etapas para resolver um problema:

> Primeiro temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia de resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a (Polya, 1995, p. 3-4).

Com o Movimento da Matemática Moderna (MMM), nas décadas de 1960 e 1970, cuja proposta priorizava a abstração e a teoria, a resolução de problemas foi tratada como algo isolado, embora continuasse a instigar pesquisadores no mundo todo em relação ao ensino e à aprendizagem de Matemática (Huanca, 2008).

Segundo Stanic e Kilpatrick (1989), desde o Antigo Egito até o final do século XX, o papel da resolução de problemas no ensino de Matemática foi caracterizado por três grandes abordagens: resolução de problemas como contexto (baseada na ideia de que os problemas e sua resolução são meios para atingir um fim); resolução de problemas como capacidade (que acredita que primeiro é necessário adquirir a capacidade de resolver problemas rotineiros, para depois desenvolver a habilidade de resolver problemas não rotineiros, o que caracteriza uma abordagem elitista); e resolução de problemas como arte (que defende que a resolução de problemas é uma arte prática, cujas técnicas devem ser ilustradas pelo professor, com os alunos utilizando-as com compreensão e não de maneira mecanizada). Essa última visão da resolução de problemas surgiu a partir dos trabalhos desenvolvidos por Polya.

A publicação do documento *An Agenda for Action*, do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), nos anos de 1980, nos EUA, representou o grande ápice da utilização da resolução de problemas no ensino da Matemática escolar em todo o mundo, inclusive no Brasil. Nesse sentido, Huanca (2006, p. 20) declara que:

> A "era da resolução de problemas", fundamentada a partir de recomendação feita no documento "Uma Agenda para a Ação", do NCTM, em 1980, diz que Resolução de Problemas deveria ser o foco da matemática escolar nos anos 80. No início da década de 90, a UNESCO, através da sua declaração mundial sobre Educação para todos, também declara claramente que a resolução de problemas deve ser um instrumento essencial da aprendizagem, do mesmo modo que a leitura, a escrita e o cálculo.

De acordo com Onuchic (1999), esse documento não poderia ser interpretado de modo que se ensinasse matemática somente em função da matemática necessária para se resolver um problema. Segundo a autora, esse documento enfatizava que o currículo de Matemática deveria ser organizado ao redor da resolução de problemas e o problema não poderia ser algo isolado.

No caso do Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 1997; 1998) sugeriam que o problema fosse usado como ponto de partida, uma vez que

> [...] a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (Brasil, 1998, p. 41).

No entanto, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), que substituiu os PCN (Brasil, 1997; 1998), não esclarece essa abordagem, isto é, não sugere como abordar esse processo em sala de aula para que os alunos aprendam Matemática (Proença; Campelo; Santos, 2022). Por outro lado, a BNCC (Brasil, 2018) destaca a importância da resolução de problemas ao longo de todo o Ensino Fundamental, visto que, além de ser objeto e estratégia para a aprendizagem,

> Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (Brasil, 2018, p. 266).

A BNCC (Brasil, 2018) enfatiza o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas, reconhecendo que essa habilidade deve ser estimulada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental da Educação Básica. Nos primeiros anos de escolaridade, as crianças estão em uma fase crucial de construção do pensamento lógico e do raciocínio matemático, sendo, portanto, fundamental estimulá-las nesse processo.

Para nós, como o processo de ensino e aprendizagem de Matemática começa nos anos iniciais do Ensino Fundamental, é essencial que, desde essa fase, os professores pedagogos compreendam o processo de resolução de problemas e saibam trabalhar com ele em sala de aula. Isso ocorre porque a maneira como os conteúdos matemáticos são apresentados no início da escolaridade pode comprometer o processo de ensino e aprendizagem nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

No contexto estadual, o Referencial Curricular do Paraná (Paraná, 2018) destaca que a resolução de problemas é uma estratégia fundamental para o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos, devendo ser utilizada no ensino de Matemática e estando presente nos objetivos de aprendizagem deste documento. De modo análogo, a versão final do CREP (Paraná, 2021) aponta a Resolução de Problemas como uma metodologia, que juntamente com a Modelagem Matemática e a Investigação Matemática

> [...] partem do princípio da contextualização de conhecimentos matemáticos para a solução de um desafio ou situação posta no contexto extraescolar e/ou intraescolar, respeitando-se, em cada um deles, os métodos e técnicas que lhes cabem para que os

> objetivos sejam alcançados, e também interpretar/avaliar o resultado obtido tendo-se em vista o contexto original do problema (Paraná, 2021, p. 6).

Em síntese, os documentos curriculares em vigor mencionam a resolução de problemas, porém pouco se explica o que é, de fato, e como abordá-la no ensino de Matemática.

1.2 Diferença entre problema e exercício

Para compreender a resolução de problemas, é necessário entender antes o que é um problema e o que o diferencia de um exercício, pois a utilização de um ou de outro pode influenciar de maneiras distintas o ensino e a aprendizagem. Segundo Lester Junior (1983), um problema é uma tarefa em que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa encontrar uma solução, mas não possui um procedimento facilmente acessível que garanta o resultado. Dessa forma, ao buscar uma solução para um problema, o aluno é levado a refletir, permitindo-lhe construir um conhecimento significativo.

Existem ainda outras definições de problema. Para Schoenfeld (1985), por exemplo, um problema é uma tarefa difícil para o indivíduo que está tentando resolvê-la, e essa dificuldade é um impasse intelectual, e não uma dificuldade em cálculo. Para Echeverría (1998, p. 48), para algo ser considerado um problema, "[...] a pessoa que está resolvendo essa tarefa precisa encontrar alguma dificuldade que a obrigue a questionar-se sobre qual seria o caminho a ser seguido para alcançar a meta". Assim, o fato de ser um problema depende da relação entre a pessoa e a situação. Ou seja, uma situação pode se configurar como um problema para uma pessoa, mas para outra não. Já para Sternberg (2008), "Se pudermos recuperar rapidamente uma resposta da memória, não temos um problema. Se não pudermos recuperar uma resposta imediata, então temos um problema a ser resolvido" (Sternberg, 2008, p. 365).

Vários estudiosos afirmam que há diferença entre o conceito de exercício e problema. Echeverría e Pozo (1998, p. 16), por exemplo, apontam que "[...] um problema se diferencia de um exercício na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução". Nesta pesquisa, utilizaremos a seguinte definição de problema:

> [...] uma situação de Matemática se torna um problema quando a pessoa precisa mobilizar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos para chegar a uma resposta. Não se trata, assim, do uso direto de uma fórmula ou regra conhecida- quando isso acontece, a situação tende a se configurar como um exercício (Proença, 2018, p. 17-18).

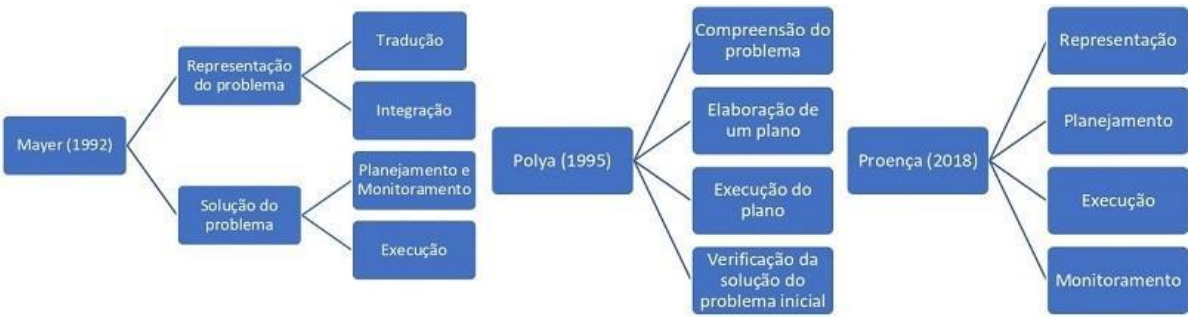
Os exercícios matemáticos também têm sua importância no processo de ensino, visto que, segundo Echeverría (1998), eles contribuem para o desenvolvimento de habilidades, procedimentos e técnicas. A autora classifica os exercícios em dois grupos: aqueles que consistem em aplicar técnicas e procedimentos já apresentados pelo professor, e aqueles que, além de repetir as técnicas, exigem uma tradução do enunciado por parte do aluno. Ela traz o seguinte exemplo: “Se, ao invés de pedir a um aluno que indique qual é o resultado de 7+5, propusermos que nos diga quantos animais há numa granja com sete pintinhos e cinco galinhas, estaremos propondo um exercício desse segundo tipo” (Echeverría, 1998, p. 49). Em outras palavras, para a autora, os exercícios são utilizados em sala de aula para memorização de um algoritmo ou conteúdo e/ou para aplicar fórmulas conhecidas. Já os problemas requerem uma reflexão sobre como resolvê-los.

Pesquisas como as de Chagas (2004), Kliemann (2015), Maia (2016) e França e Santos (2022) mostram que, nas salas de aula, os exercícios são mais utilizados do que os problemas, e, quando se trabalha com problemas, isso geralmente ocorre após a definição do conteúdo. No entanto, para melhorar o processo de ensino e aprendizagem, os professores precisam estar cientes da diferença entre os conceitos de exercício e problema, a fim de determinar o melhor momento para aplicar cada um.

1.3 Etapas do processo da resolução de problemas

Quando uma situação de Matemática se torna um problema para uma pessoa, ela busca resolvê-lo, passando assim por um processo de pensamento, denominado processo de resolução de problemas, segundo Proença (2018). Vários autores propuseram etapas ou fases para a resolução de problemas, como Mayer (1992), Polya (1995) e Proença (2018), cujas etapas são apresentadas na Figura 1 a seguir.

Figura 1 – Etapas do processo de resolução de problemas



Fonte: Elaborada pela autora (2024)

O objetivo de Mayer (1992) é explorar os tipos de conhecimentos necessários para resolver um problema. Durante a subetapa de Tradução, são exigidos conhecimentos linguísticos e semânticos, ou seja, reconhecer as palavras do enunciado, seus significados e fatos sobre o mundo, além de interpretar as informações escritas em linguagem matemática. Já na subetapa de Integração, o conhecimento necessário é o esquemático, isto é, saber organizar as informações do problema em uma estrutura coerente, o que ajuda a identificar o tipo do problema e as informações irrelevantes. Compreendido o problema, para resolvê-lo, é preciso acionar o conhecimento estratégico, por meio da elaboração e monitoramento de um plano de solução (subetapa de Planejamento e Monitoramento). Por fim, na subetapa de Execução, o conhecimento procedimental é definido como aquele usado para executar o plano.

Como mencionado anteriormente, Polya (1995) acredita que, para resolver um problema, é necessário compreendê-lo, ou seja, extrair o objetivo e analisar separadamente as partes principais do enunciado. Em seguida, é necessária a elaboração de um plano, isto é, elaborar estratégias de resolução, o que será facilitado se o solucionador relembrar ideias de experiências passadas e conhecimentos prévios. Sendo assim, ele estará pronto para executar o plano, observando cada passo do desenvolvimento. Por fim, a última etapa é o retrospecto, ou seja, reexaminar o caminho percorrido até chegar à solução final, para consolidar o conhecimento.

Proença (2018), com base nos estudos de Krutetskii (1976) e Mayer (1992), interpreta as etapas do processo de resolução de problemas propostas por Brito (2006) da seguinte maneira: a etapa de Representação diz respeito à compreensão do problema pelos alunos, que depende dos conhecimentos linguísticos, semânticos e esquemáticos. Os conhecimentos linguísticos referem-se à compreensão das palavras e seus significados, como, por exemplo, compreender que um quarto retangular tem o formato de um retângulo. Os conhecimentos semânticos envolvem a compreensão dos termos matemáticos e suas relações, como, por exemplo, entender que 1 metro equivale a 100 centímetros. Já os conhecimentos esquemáticos revelam o reconhecimento da natureza do problema com base em conceitos matemáticos, ou seja, identificar se trata-se de um problema de área, perímetro, volume, combinatória, álgebra, entre outros. Além disso, é na etapa de Representação que se verifica se as informações são completas e relevantes.

Na etapa de Planejamento, os alunos utilizam seus conhecimentos estratégicos para apresentar um caminho de solução para o problema. Essas estratégias podem incluir desenhos, tentativa e erro, cálculo mental, encontrar um padrão, entre outras. Em seguida, na etapa de Execução, os alunos executam a estratégia escolhida por meio dos cálculos necessários, que

envolvem os conhecimentos procedimentais. Por fim, o Monitoramento refere-se à etapa de verificação, isto é, verificar se a resposta encontrada está de acordo com o problema e revisar o processo de resolução. Tal revisão não precisa ocorrer apenas no final do processo de resolução; pode acontecer sempre que o solucionador perceber que cometeu um equívoco ou que há uma maneira mais adequada de solucionar o problema.

As etapas/fases, independentemente do autor tomado como referência, convergem em algumas ideias, como, por exemplo, o fato de que, para resolver um problema, é necessário propor uma estratégia de resolução e executá-la. Dessa maneira, a seguir, apresentaremos alguns tipos de estratégias nomeadas por autores da Educação Matemática.

1.4 Estratégias de resolução

Esta seção abordará as ideias de alguns autores sobre as estratégias que podem ser utilizadas na resolução de problemas, as quais são consideradas como "[...] um conjunto de conhecimentos particulares da pessoa, dependendo das suas preferências por este ou aquele caminho ou da forma que pensa ser mais fácil para seguir na busca da solução" (Proença, 2018, p. 28).

Krulik e Rudnick (1982) destacam que o professor deve, primeiramente, ser um bom solucionador de problemas, pois o objetivo da resolução de problemas reside no processo de resolução, e não necessariamente na resposta final. Nesse sentido, afirmam que "É impossível, no entanto, ensinar a resolver problemas se os próprios professores não são solucionadores de problemas adequados" (Krulik; Rudnick, 1982, p. 42, tradução nossa). Para isso, os professores precisam conhecer as variadas estratégias existentes, visto que mais de uma estratégia pode ser necessária para resolver um determinado problema. Algumas dessas estratégias incluem simulação ou experimentação, redução dos valores numéricos presentes no enunciado, procura por padrões, uso de dedução lógica, suposição e teste, e organização dos dados em tabelas, quadros, diagramas, gráficos ou equações, entre outras.

Chi, Glaser e Rees (1982) afirmam que existem diferenças no modo de solucionar um problema. Os solucionadores chamados experts, que possuem conhecimentos mais elaborados, geralmente utilizam a "estratégia para frente", ou seja, partem das variáveis dadas no problema para encontrar a informação desconhecida, visando atingir o objetivo simplesmente realizando cálculos diretos das incógnitas a partir dos dados. Já os solucionadores principiantes, que não possuem conhecimentos suficientes, utilizam a "estratégia para trás", pois tendem a partir da informação desconhecida para a afirmação apresentada.

Charles (1985), que também estuda essa temática, adota a ideia de que a resolução de problemas tem potencial de ajudar no desenvolvimento do pensamento matemático, em que este envolve processos de pensamento, conhecimento, atitudes e crenças. Este autor orienta que se deve selecionar problemas com estratégias de resolução variadas, que podem ser de adivinhação e verificação, desenho de uma figura, elaboração de uma lista organizada, elaboração de uma tabela, busca de um padrão, resolução de um problema mais simples e trabalhar para trás.

Outro autor relevante nessa área é Schoenfeld (1985), que apresenta uma estrutura de análise composta por quatro categorias: os recursos, que são os conhecimentos que um indivíduo é capaz de aplicar em uma determinada situação matemática, como, por exemplo, os fatos e procedimentos algorítmicos conhecidos, bem como competências relevantes; a heurística, que corresponde às estratégias (como exploração de analogias, introdução de elementos auxiliares no problema, ou trabalhar com problemas auxiliares, argumentar por contradição, trabalhar a partir dos dados, decompor e recombinar, explorar problemas relacionados, desenhar figuras, generalizar, redução por absurdo e demonstração indireta, variar o problema, e trabalhar em sentido inverso) e técnicas que o indivíduo utiliza para compreender o problema; o controle, que trata da forma como os indivíduos utilizam as informações que têm à sua disposição; e os sistemas de crenças, a "visão matemática do mundo" do indivíduo, no qual as crenças determinam como ele abordará um problema.

Mayer (1992) mostra que, dependendo de como um problema é apresentado, o indivíduo segue uma determinada estratégia de resolução. Entre essas estratégias estão a de redução e a de isolamento. Para entendê-las, o autor propõe o seguinte exemplo: quando é solicitado aos alunos que resolvam uma equação, como $(8 + 3x)/2 = 3x - 11$, a maioria tenta isolar a incógnita de um lado e os números do outro (estratégia de isolamento). No entanto, quando o professor expressa a equação em palavras, dizendo "Encontre um número tal que, se 8 mais 3 vezes o número for dividido por 2, o resultado será 3 vezes o número menos 11", muitos alunos tentam executar quaisquer operações indicadas (estratégia de redução). Essas estratégias, de acordo com o autor, raramente são ensinadas explicitamente.

Com uma ideia parecida, Hunt[1] (1994, apud Quintiliano, 2011) acredita que uma das maneiras de resolver um problema é começar visualizando seu fim, ou seja, analisando o

[1] HUNT, E. Problem solving. *In*: R. J. Sternberg (Ed.)**Thinking and problem solving**. Academic Press, 1994. p. 215-232.

objetivo e as metas, para ir manipulando os dados e assim, tentar diminuir a distância entre o estado inicial e a solução. Esse é um procedimento denominado meios e fins.

Assim como Mayer (1992), os pesquisadores Hegarty, Mayer e Monk (1995) investigaram as estratégias de resolução de problemas aritméticos expressos por palavras e concluíram que existe uma diferença no percurso do caminho de solução, que nem sempre leva às mesmas respostas. Alguns solucionadores selecionam algumas informações do enunciado (como números e palavras-chave) e tentam traduzi-las diretamente em um conjunto de cálculos (tradução direta). Outros, por sua vez, fazem uma representação mental da situação descrita no problema e, a partir dessa representação, desenvolvem e executam um plano de solução (modelo de problema). De acordo com os autores, os alunos devem aprender a utilizar o segundo tipo de estratégia, pois solucionadores bem-sucedidos tendem a empregar essa abordagem, além de que a tradução direta não funciona bem em alguns problemas.

Sternberg (2008) também sugere estratégias para tentar solucionar um problema, como trabalhar para frente e trabalhar para trás, com o mesmo significado atribuído por Chi, Glaser e Rees (1982), a análise de meios e fins, conforme também proposto por Hunt (1994, apud Quintiliano, 2011), e ainda a estratégia de gerar e testar. Essa última consiste em gerar cursos de ação alternativos, não necessariamente de maneira sistemática, e depois testá-los para verificar qual funcionará.

Posamentier e Krulik (2009) indicam que é necessário desenvolver nos alunos a capacidade de organizar os dados de modo eficaz para resolver problemas. Eles também podem optar por começar a resolver um problema com um palpite, baseado em seu conhecimento prévio, para, em seguida, testá-lo. Essa estratégia é conhecida como adivinhação inteligente e testes. Embora as estratégias citadas anteriormente sejam úteis em alguns problemas, é interessante incentivar os alunos a buscarem outras abordagens, como tentar resolver um problema mais simples, porém equivalente ao original. Esta é considerada pelos autores uma estratégia mais elegante. Além disso, os alunos podem utilizar suas competências matemáticas em contextos de situações familiares, o que facilita a resolução.

A estratégia denominada *trabalhar no sentido inverso* é análoga à estratégia de *trabalhar para trás*, proposta por Chi, Glaser e Rees (1982) e Sternberg (2008). Outra forma de resolver um problema, segundo Posamentier e Krulik (2009), é procurar por padrões (geométricos ou numéricos). Ou seja, os alunos podem observar se há um padrão, anotar suas observações e, com base nisso, utilizar seus conhecimentos para encontrar uma solução para o problema. Também é possível que os alunos façam inferências lógicas, ou seja, cheguem a conclusões que conduzam a novas inferências, até que o problema seja resolvido. Fazer uma

representação visual do problema também pode ser extremamente útil para os solucionadores de problemas. Os autores ainda sugerem a estratégia de adotar um ponto de vista diferente, isto é, em vez de abordar o problema de forma direta e óbvia, o aluno pode optar por uma abordagem alternativa.

Por fim, Proença (2018) indica que a situação de Matemática a ser utilizada como ponto de partida para o ensino deve ser escolhida de maneira que possa ser resolvida por mais de uma estratégia. Dentre essas estratégias, incluem-se a tentativa e erro, a criação de desenhos e/ou figuras, a realização de simulações, a dedução lógica, a resolução no sentido inverso, entre outras. O Quadro 1 apresenta as estratégias elencadas pelos autores mencionados anteriormente.

Quadro 1 – Tipos de estratégias

(continua)

Autores	Estratégias
Krulik e Rudnick (1982)	Reconhecer padrões
	Trabalhar de trás para frente
	Supor e testar
	Simulação e experimentação
	Redução (iniciar com casos particulares)
	Listagem exaustiva
	Dedução lógica
	Representação de dados (gráficos, tabela, equação, lista, diagramas)
Chi, Glaeser e Rees (1982)	Estratégia para frente
	Estratégia para trás
Charles (1985)	Supor e testar
	Desenhar uma figura
	Fazer uma lista organizada
	Fazer uma tabela
	Observar padrão
	Resolver um problema simples
	Trabalhar de trás para frente
Schoenfeld (1985)	Explorar analogias
	Explorar problemas relacionados
	Desenhar figuras
	Introduzir elementos auxiliares em um problema
	Argumentar por contradição
	Reformular o problema
	Trabalhar em sentido inverso
	Decompor e recombinar
	Redução por absurdo
	Variação do problema
Mayer (1992)	Estratégia de redução
	Estratégia de isolamento
Hunt (1994, apud Quintiliano, 2023)	Meios e fins
Hegarty, Mayer e Monk (1995)	Tradução direta
	Modelo de problema

Quadro 1 – Tipos de estratégias

(conclusão)

Autores	Estratégias
Sternberg (2008)	Análise de meios e fins
	Trabalhar para frente
	Trabalhar para trás
	Gerar e testar
Posamentier e Krulik (2009)	Organização dos dados
	Adivinhação inteligente e testes
	Resolver um problema mais simples e equivalente
	Representar/simular a ação
	Trabalhar no sentido inverso
	Encontrar um padrão
	Raciocínio lógico
	Fazer um desenho
	Adotar um ponto de vista diferente
Proença (2018)	Supor e testar (tentativa e erro)
	Fazer desenhos/figuras
	Utilizar casos particulares
	Montar ou encontrar um padrão (processo de generalização)
	Trabalhar no sentido inverso
	Fazer uma simulação e experimentação
	Realizar a dedução lógica
	Utilizar qualquer tipo de representação de dados (gráfico, equação, diagrama, tabela, quadro)

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

A maneira de utilizar a resolução de problemas em sala de aula depende muito do professor. Sendo assim, é preciso saber como e quando utilizá-la, ou seja, é preciso definir qual abordagem utilizar em determinado momento e como ela favorece o ensino e aprendizagem de Matemática. O ensino da resolução de problemas pode ser trabalhado por diferentes abordagens, o que explicaremos na próxima subseção.

1.5 Abordagens de ensino da resolução de problemas

A pesquisa realizada por Schroeder e Lester Junior (1989) aponta três abordagens de como a resolução de problemas era ensinada na década de 1980: ensino *sobre* resolução de problemas, ensino *para* resolução de problemas e ensino *via/através* da resolução de problemas.

O ensino *sobre* resolução de problemas é baseado no modelo de Polya, que consiste em quatro fases: compreender o problema, elaborar um plano de ação, executar o plano e retrospecto. Desse modo, o professor ensina aos alunos os passos de como resolver um problema para que eles se apropriem dessa competência. Essa abordagem considera a resolução

de problemas como um novo conteúdo, uma teoria. O Quadro 2 mostra alguns questionamentos relativos a cada uma dessas fases.

Quadro 2 - Fases de resolução de problemas segundo Polya

Fase	Ação	Questionamentos
Compreensão do problema	É preciso compreender o problema	Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? Trace uma figura. Adote uma notação adequada
Elaboração de um plano de ação	Encontre a conexão entre os dados e a incógnita. É possível considerar problemas auxiliares. É preciso chegar a um plano para a resolução	Já viu o problema antes? Ou já o viu de maneira ligeiramente diferente? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? É possível reformular o problema?
Execução do plano	Execute o plano	É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?
Retrospecto	Examine a solução obtida	É possível verificar o resultado? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível utilizar o resultado/método em outro problema?

Fonte: Adaptado de Polya (1995, p. XII-XIII[2])

Já a abordagem de ensino *para* resolução de problemas é baseada em transferir o conhecimento matemático aprendido para outras situações contextualizadas, ou seja, o professor se preocupa com a habilidade do aluno em aplicar o conteúdo matemático em problemas. Nesse sentido, Schroeder e Lester Junior (1989, p. 32, tradução nossa[3]) afirmam que "[...] a única razão para aprender matemática é ser capaz de utilizar os conhecimentos adquiridos para resolver problemas".

E, por fim, o ensino *através/via* resolução de problemas se baseia em utilizar problemas como ponto de partida para o ensino de conteúdos matemáticos. Nessa abordagem, o aluno torna-se ativo e dá significado à sua aprendizagem, uma vez que, ao invés de decorar e aplicar regras/fórmulas prontas, ele vai construindo seu conhecimento. Segundo os autores Schroeder e Lester Junior (1989, p. 33, tradução nossa[4]), "[...] A aprendizagem da matemática desta forma pode ser vista como um movimento do concreto [...] para o abstrato [...]".

De acordo com esses autores, as três abordagens podem ser combinadas de diversas formas. No entanto, observa-se que o ensino por meio da resolução de problemas não é

[2] A introdução do livro está numerada em algarismos romanos, enquanto que a partir do capítulo 1, a numeração é escrita em algarismos indo-arábicos.

[3] "[...] sole reason for learning mathematics is to be able to use the knowledge gained to solve problems".

[4] "[...]The learning of mathematics in this way can be viewed as a movement from a concrete […] to the abstract […]."

amplamente trabalhado por professores, autores de livros didáticos e responsáveis pela elaboração dos currículos, o que é corroborado pela pesquisa de Freitas e Cardoso (2023).

Sobre a maneira de iniciar um conteúdo matemático a partir de problemas, Allevato e Onuchic (2014, p. 39) apontam que essa "é uma das alternativas metodológicas adequadas ao cenário de complexidade em que se apresentam atualmente as escolas, onde se insere o relevante trabalho do educador matemático". Complementando essa ideia, as autoras Rodrigues, Oliveira e Calderoni (2018, p. 114) declaram que

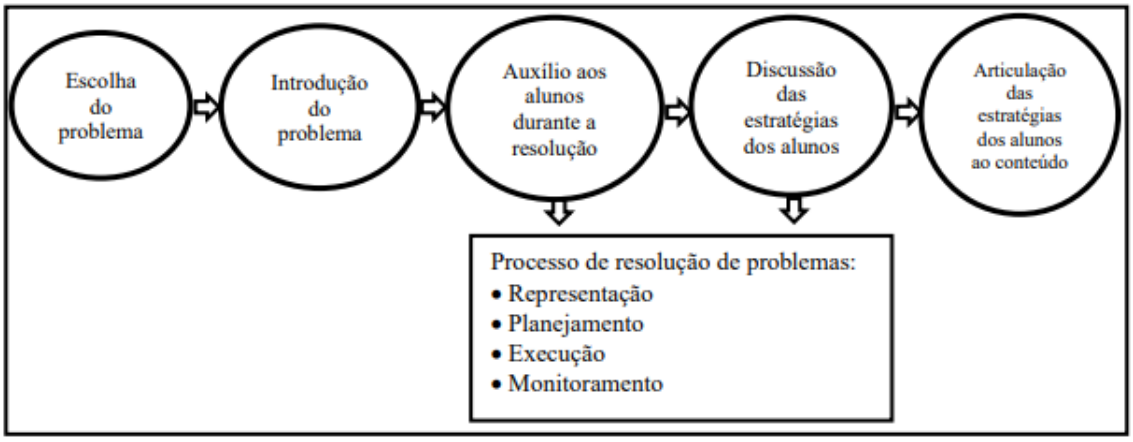
> [...] mesmo sendo desafiador desenvolvê-la [resolução de problemas no ensino e aprendizagem], esta proposta contribui significativamente tanto no trabalho didático-pedagógico do professor, quanto na construção do conhecimento pelo aluno. Além do que, oportuniza aos discentes o desenvolvimento da capacidade de aprender a aprender.

Tendo isso em vista, a presente pesquisa adotará a abordagem do ensino por meio da resolução de problemas. A partir deste ponto, quando nos referirmos a essa abordagem, utilizaremos as iniciais maiúsculas 'Resolução de Problemas' ou sua abreviação 'RP'. Com o objetivo de apresentar uma perspectiva sobre como tratar o problema como ponto de partida, explicaremos, na próxima subseção, a proposta de Proença (2018) denominada Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP).

1.6 Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas

Para contribuir com o trabalho didático-pedagógico do professor em sala de aula, utilizando problemas como ponto de partida, uma das possibilidades para ensinar um novo conteúdo ou conceito matemático é por meio de uma sequência de cinco ações de ensino proposta por Proença (2018), a saber: escolha do problema, introdução do problema, auxílio aos alunos durante a resolução, discussão das estratégias dos alunos e articulação dessas estratégias ao conteúdo, conforme ilustrado na Figura 2. Essa sequência é denominada Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP).

Figura 2 – Esquema do trabalho por meio da sequência de ações



Fonte: Proença (2018, p.46)

Escolha do problema: "[...]consiste na seleção de uma situação matemática que seja reconhecida como um problema pelos alunos" (Proença, 2018, p. 46). Para isso, o problema proposto deve permitir que os alunos utilizem conteúdos matemáticos previamente aprendidos, e o professor deve planejar formas de construir o novo conteúdo ou conceito, criando condições para estabelecer relações entre os conhecimentos prévios dos alunos e os novos, além de favorecer a generalização de ideias. É fundamental que o problema ofereça mais de uma estratégia de resolução, e o professor deve antecipar essas estratégias para compreender o raciocínio dos alunos durante o processo. Também é possível utilizar problemas com mais de uma resposta. Embora seja comum recorrer aos problemas dos livros didáticos, isso não impede o ensino por meio da Resolução de Problemas, desde que seja feita uma adaptação, de forma que a resolução do problema possibilite o ensino de um novo conteúdo matemático (Lara, 2021; Meneghelli; Cardozo, Possamai e Silva, 2018; França e Santos, 2022). Proença (2018) ressalta que essa etapa é crucial, pois o problema escolhido influencia diretamente todo o trabalho subsequente, que visa favorecer a aprendizagem da Matemática.

Introdução do problema: "[...] é nessa ação que deve ocorrer o contato do professor com os alunos em sala de aula" (Proença, 2018, p. 50). Assim, para introduzir o problema aos alunos como ponto de partida do ensino de conteúdos novos, o professor deve solicitar que os alunos sejam separados em grupos, para melhor compartilharem suas experiências e conhecimentos anteriores e facilitar uma análise mais profunda do professor sobre as estratégias utilizadas. Além disso, é nessa ação que os estudantes começam a tentar resolver a situação matemática da maneira como quiserem. Desse modo, eles reconhecem (ou não) a situação como um problema, isto é, como algo difícil que requer reflexões para resolvê-lo.

Em relação ao trabalho em grupo, Piletti (1985, p. 115) corrobora com isto, uma vez que

> O trabalho em grupo oferece ao aluno a oportunidade de estabelecer troca de ideias e opiniões, desenvolvendo as habilidades necessárias à prática da convivência com as pessoas. Na escola, o trabalho em grupo colabora para: completar, fixar e enriquecer conhecimentos; enriquecer experiências; atender às diferenças individuais; desenvolver o senso de responsabilidade; treinar a capacidade de liderança e aceitação do outro; desenvolver o senso crítico e a criatividade; desenvolver o espírito de cooperação.

Auxílio aos alunos durante a resolução: "[...] o papel do professor no auxílio aos grupos é o de observador, incentivador e direcionador da aprendizagem, apoiando os alunos a desenvolverem autonomia no processo de resolução" (Proença, 2018, p. 51). Assim, a partir da observação, o professor deve acompanhar os alunos ao longo de todo o trabalho, fazendo questionamentos, mas nunca fornecendo as respostas prontas. No papel de direcionador, caso algum grupo não encontre um caminho para a resolução, o professor deve guiá-lo para uma estratégia previamente elaborada, oferecendo dicas. Além disso, cabe ao professor incentivar os estudantes a resolverem o problema e a desenvolverem autonomia durante o processo. É também nesta etapa que o professor observa as dificuldades dos grupos e suas motivações ao resolver o problema, considerando as diferentes fases do processo de resolução.

Discussão das estratégias dos alunos: Resolvido o problema, os grupos devem discutir as estratégias utilizadas, expondo-as para os colegas, na lousa. Nesse sentido, "[...] o objetivo principal é promover uma socialização da resolução feita por cada grupo, de modo que os alunos possam perceber e construir relações entre os conhecimentos que utilizaram" (Proença, 2018, p. 52). Nesse momento, o professor aponta os possíveis erros cometidos, principalmente em relação ao uso inadequado das estratégias, incompreensão da língua materna, e conceitos e procedimentos matemáticos mal compreendidos. Ao final, os alunos precisam avaliar se as respostas encontradas estão de acordo com o contexto e sintetizar aquilo que aprenderam.

Articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo: O professor relaciona as estratégias dos alunos com o conteúdo/conceito/assunto que se pretende ensinar. Assim, quando possível, ele articula os pontos centrais das estratégias utilizadas com o conceito ou expressão matemática que é o novo conteúdo. No entanto, quando isso não é possível, "pode-se apresentar a resolução do problema de forma direta aos alunos" (Proença, 2018, p. 52). Termina-se assim, a sequência de ações do EAMvRP para o ensino via Resolução de Problemas.

Com o objetivo de contribuir para o processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática, Proença (2021) apresenta uma proposta de organização de ensino baseada na Resolução de Problemas, visando o desenvolvimento de uma formação conceitual nos alunos. Essa proposta é composta por quatro etapas: (1) Uso do problema como ponto de partida; (2) Formação do

conceito; (3) Definição do conteúdo; (4) Aplicação em novos problemas. Resumidamente, essa organização consiste, inicialmente, em utilizar uma situação matemática como ponto de partida e implementar as ações de ensino do EAMvRP. Após esse primeiro contato com o conteúdo, o professor deve conduzir os alunos à formação do conceito, propondo atividades que explorem as propriedades e características do conceito em questão. Em seguida, é necessário definir o conceito matemático e os procedimentos algorítmicos de resolução. Por fim, o professor deve oferecer novos problemas com o objetivo de ressignificar o conceito.

1.7 Estudos utilizando o EAMvRP

A proposta do EAMvRP de Proença (2018) e da organização de ensino de Proença (2021) vêm sendo discutidas e investigadas por pesquisas realizadas pelos membros do Grupo de Estudos em Resolução de Problemas na Educação Matemática (GERPEM)[5], sob liderança do professor doutor Marcelo Carlos de Proença. A fim de mapear essas produções acadêmicas, realizamos uma revisão sistemática de literatura, baseada nos pressupostos de Mendes e Pereira (2020), que consiste em cinco etapas: objetivo e pergunta; busca dos trabalhos; processo de seleção das pesquisas; análise das produções; apresentação da revisão sistemática. Desse modo, buscamos responder a seguinte pergunta "Como o EAMvRP é abordado em sala de aula?". Optamos por realizar a busca no Currículo Lattes[6] do professor doutor Marcelo Carlos de Proença, pelo fato de apresentar a totalidade dos trabalhos do GERPEM, diferentemente de outras bases de dados, como o *Google Acadêmico*, que não indicou os trabalhos de eventos elaborados pelos membros do grupo de pesquisa. Foram encontrados 175 trabalhos acadêmicos.

Para refinar nossa busca, elaboramos os seguintes critérios de inclusão: produções publicadas de 2019 a abril de 2024 (escolhemos essa data inicial por ser o ano posterior à publicação do livro utilizado como referência – Proença (2018)); produções cujos participantes foram alunos da Educação Básica; produções que apresentaram resultados de uma implementação utilizando o EAMvRP para o ensino de conteúdos matemáticos; artigos, resumos ou trabalhos de eventos que não foram derivados de uma pesquisa de dissertação ou tese. Dessa forma, selecionamos ao todo 12 produções acadêmicas, que foram baixadas a partir do *Digital Object Identifier (DOI)*, que em português significa "Identificador de Objeto

[5] Disponível em: https://dma.uem.br/pesquisa/grupos-de-pesquisa/gerpem
[6] Disponível em: http://lattes.cnpq.br/9198626057262085

Digital", e pelos anais dos eventos encontrados no *Google*, e lidos na íntegra. O Quadro 3 mostra a relação entre as produções encontradas e as selecionadas.

Quadro 3 - Produções acadêmicas encontradas

Tipo de produção	Total	Selecionados
Artigos completos publicados em periódicos	75	6
Livros publicados/organizados ou edições	4	0
Capítulos de livros publicados	12	0
Trabalhos completos publicados em anais de congressos	55	3
Resumos expandidos publicados em anais de congresso	5	0
Resumos publicados em anais de congressos	8	0
Orientações de dissertação de mestrado concluídas	12	1
Orientações de tese de doutorado concluídas	4	2

Fonte: Autora (2024)

Apresentamos no Quadro 4 abaixo, cada uma das doze produções selecionadas.

Quadro 4 – Produções acadêmicas selecionadas

Título	Autores/Ano
Uma proposta de ensino de Equação de 1º grau com uma incógnita via Resolução de Problemas	Sousa e Proença (2019)
O Ensino de Matemática Financeira via Resolução de Problemas: uma experiência no ensino médio	Oliveira e Proença (2020)
Equações de 1° grau via Resolução de Problemas: uma experiência no ensino remoto emergencial	Rozario, Oliveira e Proença (2021)
Ensino-aprendizagem de adição de frações via resolução de problemas	Akamine e Proença (2022)
Ensino-Aprendizagem de Área de Triângulo via Resolução de Problemas: análise sob o enfoque do modelo dos campos semânticos	Rozario (2022)
Contribuições de uma proposta de ensino por meio da resolução de problemas para a aprendizagem de sistemas lineares no ensino médio	Luz (2023)
Ensino-Aprendizagem de Equações de 2º grau via Resolução de Problemas: uma experiência a partir de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem	Pereira e Proença (2023)
Conhecimentos mobilizados por alunos do 9º ano do ensino fundamental na resolução de um problema de regiões retangulares	Pereira, Doneze e Proença (2023)
Estratégias de alunos do 7º ano na Resolução de um problema de subtração de frações no contexto do EAMvRP	Rozario, Silva e Proença (2023)
O ensino de logaritmos via Resolução de Problemas no ensino médio	Santos, Campelo e Proença (2023)
Uma experiência de Ensino-Aprendizagem de Matrizes via Resolução de Problemas no ensino médio	Sousa, Matsuo, Oliveira e Proença (2023)
A Aprendizagem de Inequação Polinomial de 1º Grau de uma Turma de 7º ano do Ensino Fundamental: análise no contexto de uma sequência didática via resolução de problemas	Travassos (2023)

Fonte: Autora (2025)

Sousa e Proença (2019) realizaram uma investigação com alunos do 7° ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de analisar a contribuição da implementação de uma proposta de ensino via resolução de problemas para favorecer a compreensão de equações do 1° grau com uma incógnita. Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa, na modalidade de pesquisa-participante. Foram entregues aos alunos dois problemas, que serviram como ponto de partida para o ensino das equações de 1° grau. Os dados foram obtidos a partir das resoluções dos alunos e das notas de campo. Os resultados mostraram que a estratégia mais utilizada foi a de 'tentativa e erro'. Os alunos apresentaram dificuldades em relação ao conceito de dobro, triplo e igualdade, além de, em geral, se mostrarem desmotivados. No entanto, por meio da articulação realizada, os alunos compreenderam as características das equações de 1° grau, como o uso da incógnita e do sinal de igualdade, e perceberam que a utilização desse tipo de equação pode facilitar a resolução de problemas. Nesse sentido, e apesar das dificuldades, '[...] a abordagem de ensino via resolução de problemas, estruturada conforme as cinco ações de ensino propostas por Proença (2018), e que foi desenvolvida em sala de aula, contribuiu para a compreensão de equação do primeiro grau com uma incógnita' (Sousa; Proença, 2019, p. 449).

O relato de experiência de Oliveira e Proença (2020) teve como objetivo apresentar uma prática ocorrida durante o estágio de docência a respeito do ensino de Matemática Financeira. Trata-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa, em que foi utilizada uma situação de Matemática para dar início ao conteúdo de acréscimos e descontos sucessivos. Os dados foram coletados a partir das resoluções dos alunos e de um relatório da estagiária, e analisados a partir das cinco ações do EAMvRP. Os alunos participantes do 3º ano do Ensino Médio apresentaram, de início, dificuldades em elaborar caminhos de resolução para um problema envolvendo porcentagem. Essa dificuldade ocorreu devido à má interpretação ou à incompreensão de conteúdos anteriores. Porém com a mediação e incentivo das professoras (estagiária e regente), os alunos conseguiram elaborar boas estratégias: transcrever a situação como uma equação de primeiro grau; associar o problema a uma equação do primeiro grau utilizando uma incógnita, mas com a representação das porcentagens em forma de fração; fazer o processo inverso, utilizando regra de três e considerando os aumentos e descontos dentro das porcentagens. Por fim, “verificou-se que o ensino via resolução de problemas possibilitou em termos da pesquisa, uma maior participação e interação dos alunos, contribuindo para a construção do conhecimento” (Oliveira; Proença, 2020, p. 41-42).

O relato de experiência de Rozario, Oliveira e Proença (2021), que teve como objetivo apresentar uma implementação de ensino-aprendizagem de equação de 1º grau via resolução de problemas, é um trabalho de natureza qualitativa, em que foi implementada pelo *Google Meet*,

uma proposta de ensino estruturada nas cinco ações do EAMvRP, cujos participantes foram alunos do 8° ano do Ensino Fundamental. Os resultados mostraram que as estratégias mais utilizadas foram o cálculo mental, a estratégia de desenho e algo parecido com uma tabela, mas não organizado desta maneira. Resolvido o problema, os alunos articularam o novo conteúdo a partir da exposição das estratégias dos alunos. Em geral, os autores consideraram que "o EAMvRP é uma estratégia de ensino que propiciou não apenas a construção do conhecimento, mas também a interação mais ativa entre a turma, algo que muito se busca no ensino" (Rozario; Oliveira; Proença, 2021, p. 916).

Akamine e Proença (2022) relataram sua experiência com alunos da Educação Básica, na qual o conteúdo introduzido foi a adição de frações. O objetivo desse relato foi compreender a contribuição de um ensino da operação de adição de frações por meio da resolução de problemas para a aprendizagem dos alunos. Para isso, os autores elaboraram uma proposta de ensino baseada no EAMvRP e a implementaram de forma remota, pelo Google Meet, com alunos do 6° ano do Ensino Fundamental. Para resolver a situação de Matemática, utilizada como ponto de partida, os alunos empregaram duas estratégias: adicionar os numeradores e os denominadores, e inverter uma das frações e fazer a operação da mesma forma. Embora ambas as estratégias estivessem incorretas, os alunos não demonstraram dúvida ao elaborá-las. Assim, as dificuldades apresentadas pelos alunos estavam relacionadas ao conhecimento estratégico. Na etapa de monitoramento, os alunos não buscaram verificar se a resposta estava correta no contexto do problema. Segundo os autores, '[...] o EAMvRP proporcionou a participação ativa dos alunos e, de certa forma, motivou-os a se envolver na aprendizagem' (Akamine; Proença, 2022, p. 320).

O objetivo da dissertação de mestrado de Rozario (2022) foi analisar as enunciações produzidas no processo de ensino-aprendizagem de Área de Triângulo via Resolução de Problemas à luz do Modelo dos Campos Semânticos (MCS). Os participantes foram alunos de uma turma de 6° ano do Ensino Fundamental, em que a pesquisadora era professora regente. Na implementação, alguns alunos participaram das aulas pelo *Google Meet* e outros presencialmente. Os dados analisados foram obtidos pelos registros dos alunos de uma situação de Matemática, gravações de vídeo e diário da pesquisadora. A proposta de ensino executada foi pautada nas cinco ações do EAMvRP. Os resultados mostraram que na terceira ação, os alunos tiveram dificuldades no processo de resolução de problemas, especificamente dois (de cinco) grupos de alunos apresentaram dificuldades em todas as etapas e um grupo apresentou dificuldades na etapa de monitoramento, isto é, não tiveram a iniciativa de rever a resolução e não verificaram se a resposta estava de acordo com o enunciado.

Embora os dados tenham apontado que somente dois grupos tiveram dificuldades no planejamento, os demais grupos também optaram inicialmente pela estratégia inadequada de calcular o perímetro. No entanto, com o auxílio da pesquisadora, esses três grupos conseguiram criar uma estratégia que os levou à solução correta. Também foi possível identificar as seguintes noções do MCS: conhecimento, acreditar (crença), interlocutor, campo semântico, justificação, núcleo, resíduo de enunciação, significado/objeto, sujeito biológico/sujeito cognitivo.

Pela ação de articulação das estratégias, os alunos perceberam a relação entre a área de um triângulo e a área de um retângulo e conseguiram compreender a expressão que fornece essa área, levando em consideração o comprimento e altura. Em resumo, a autora concluiu:

> [...] que o EAMvRP, pautado nas 5 (cinco) ações de Proença (2018) e no MCS de Lins (2012), proporcionou aos alunos a construção de novos saberes diante da situação de matemática proposta na pesquisa e que essas teorias podem ser desenvolvidas em sala aula por professores que ensinam matemática e que desejam mudar sua prática (Rozario, 2022, p. 117).

Em um estudo mais aprofundado, a tese de Luz (2023) teve como objetivo analisar as contribuições de uma organização de ensino baseada na resolução de problemas para a aprendizagem do conteúdo de Sistemas Lineares com estudantes da Educação Básica. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, na modalidade de pesquisa pedagógica, pois o autor também era o professor da turma de 2° ano do Ensino Médio em que a pesquisa foi conduzida. Foi elaborada uma sequência didática organizada nas quatro etapas propostas por Proença (2021). As resoluções dos alunos, as transcrições de áudio das aulas e as anotações de campo do pesquisador constituíram os dados analisados.

Destacando a primeira etapa, as aulas planejadas de acordo com as cinco ações do EAMvRP permitiram que a pesquisa evidenciasse que, na ação de auxílio aos alunos durante a resolução, relacionada às duas primeiras situações propostas, foram observadas dificuldades em conhecimentos linguísticos (como, por exemplo, não perceber que uma livraria apresentou dois orçamentos para os materiais escolares), estratégicos (como não saber qual estratégia adotar para resolver o problema) e procedimentais (como, por exemplo, usar apenas números inteiros e desconsiderar os números decimais). Nas demais atividades, os erros procedimentais foram os mais destacados. Em síntese, essa organização de ensino possibilitou avanços nas competências de representação, raciocínio e resolução de problemas, além de contribuir para a abordagem da Resolução de Problemas durante o trabalho em sala de aula e apontar as dificuldades no ensino de Sistemas Lineares. De acordo com o autor, os participantes não

aprenderam por meio do ensino tradicional, mas aprenderam a resolver problemas relacionados ao conteúdo abordado.

O estudo de Pereira e Proença (2023) teve como objetivo apresentar uma experiência de uso da Trajetória Hipotética de Aprendizagem no ensino-aprendizagem de Equações de 2º grau via Resolução de Problemas. Assim, foi implementada uma trajetória hipotética de ensino-aprendizagem via Resolução de Problemas à alunos de uma turma de 9° ano do Ensino Fundamental, em que foram analisados os registros dos alunos, levando em consideração as cinco ações do EAMvRP. Nesta pesquisa foi enfatizada a necessidade de levantar hipóteses para que o professor antecipe um número considerável de dúvidas e planeje como solucioná-las, contribuindo para uma melhor aprendizagem. O problema utilizado como ponto de partida, elaborado pelos autores, levantou dúvidas nos alunos relacionadas aos conhecimentos linguísticos e semânticos, que por terem sido previstas pelos pesquisadores, foram sanadas facilmente. De acordo com os autores, a "[...] exploração inicial por meio de um problema, em sala de aula, ao contrário do que ocorre no ensino tradicional, contribuiu para que os alunos compreendessem o sentido de algumas articulações possíveis entre o contexto e o conteúdo" (Pereira; Proença, 2023, p. 445).

O objetivo da pesquisa de Pereira, Doneze e Proença (2023) foi investigar os conhecimentos mobilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental ao resolverem um problema sobre área de regiões retangulares, proposto de acordo com o EAMvRP, envolvendo equações do 2º grau. Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa, na qual os pesquisadores implementaram uma proposta de ensino baseada no EAMvRP para equações do 2° grau. Os registros escritos dos alunos foram analisados e organizados conforme as quatro etapas do processo de resolução de problemas.

Na etapa de representação, os resultados mostraram que a maioria dos grupos de alunos não apresentou dificuldades nos conhecimentos linguísticos, semânticos e esquemáticos. Na segunda etapa, a de planejamento, foi possível observar o uso de quatro estratégias diferentes, sendo a mais utilizada a estratégia aritmética, na qual os alunos manipularam os dados numericamente e realizaram operações.

Na etapa de execução, os erros procedimentais foram observados em apenas alguns grupos, sendo um dos erros relacionados à multiplicação de dois números inteiros positivos. Por fim, embora a maioria dos grupos tenha apresentado respostas que satisfizeram a situação matemática proposta, não foi possível afirmar se eles realmente monitoraram suas respostas.

Em síntese, os autores inferiram que a abordagem do EAMvRP é importante '[...] no sentido de que ajuda o professor a ter clareza sobre os conhecimentos de seus alunos' (Pereira; Doneze; Proença, 2023, p. 18)."

O relato de experiência de Rozario, Silva e Proença (2023) teve como objetivo apresentar as estratégias de resolução de um problema envolvendo o conteúdo de subtração de frações com denominadores diferentes. Este relato caracteriza-se como uma intervenção pedagógica, realizada com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. A situação matemática que visava introduzir o conteúdo foi implementada com base nas ações do EAMvRP.

Os autores constataram que os alunos utilizaram diferentes estratégias de resolução, nem todas consideradas válidas, como, por exemplo, subtrair os numeradores e subtrair os denominadores das frações, o que é incorreto quando as frações possuem denominadores diferentes. A intervenção da professora foi necessária para que os alunos repensassem a resolução. Uma das estratégias de um grupo chamou a atenção dos autores, pois envolveu uma associação entre o todo e a parte.

De modo geral, os resultados mostraram que a abordagem do EAMvRP permitiu colocar o aluno no centro do processo de aprendizagem, uma vez que ele próprio validou seus resultados. Além disso, essa abordagem proporcionou maior interação entre alunos e professor, além de possibilitar uma variedade de caminhos que poderiam ser seguidos para resolver a situação, contribuindo para a criatividade e criticidade dos alunos

A pesquisa qualitativa de Santos, Campelo e Proença (2023) teve como objetivo analisar a compreensão de alunos sobre Logaritmos na abordagem do EAMvRP. Os participantes foram alunos do 2º ano do Ensino Médio. Embora os pesquisadores tenham conduzido as aulas, como não eram professores da turma, contaram com a presença da professora regente. Os dados foram constituídos pelas resoluções dos alunos, respostas a um questionário e notas de campo dos pesquisadores.

Os resultados mostraram que, nas duas primeiras questões da situação de Matemática, como o objetivo era utilizar os conhecimentos prévios dos alunos, eles não apresentaram dificuldades ao resolvê-las. Na terceira questão, no entanto, os alunos se mostraram preocupados em encontrar uma resposta exata e indicaram dificuldades em igualar as bases das potências para resolver a equação exponencial. Com a abordagem implementada, perceberam que o algoritmo que conheciam não era suficiente para resolver a questão, o que os levou a elaborar outras estratégias. A mais utilizada foi a de tentativa e erro, na qual alguns grupos organizaram e executaram as soluções de maneiras diferentes, e apenas um grupo usou uma estratégia inadequada, aplicando a média aritmética.

De modo geral, o EAMvRP “[...] favoreceu aos alunos o uso de conhecimentos prévios [...]” (Santos; Campelo; Proença, 2023, p. 16), além de proporcionar o estabelecimento de relações entre as potências obtidas durante a resolução.

O relato de experiência de Sousa, Matsuo, Oliveira e Proença (2023) teve como objetivo compreender a contribuição do ensino do conceito de Matriz na abordagem do EAMvRP para a aprendizagem dos alunos. Para isso, foi elaborada e implementada uma proposta de ensino baseada nas cinco ações, com a participação de alunos do 1º ano do Ensino Médio. Um dos autores deste relato era, naquele momento, a professora regente da turma, o que facilitou a implementação da proposta.

Os dados analisados foram provenientes das resoluções dos alunos, da gravação de áudio das aulas e do diário de campo. Os resultados mostraram que os alunos apresentaram algumas dificuldades, como o embaraço de alguns em organizar os dados da situação, além de confusões entre a multiplicação e a divisão, e entre os termos 'sem custo' e 'com custo', presentes no enunciado.

Na quinta ação, como nenhum grupo de alunos utilizou a estratégia de tabela, as pesquisadoras convidaram os alunos a construírem tabelas para articular com a ideia de matriz. Assim, '[...] os alunos compreenderam o conceito de matriz e como o uso de tabelas facilita a organização de dados, relatando que a utilização de tabela para introduzir o conceito fez sentido [...]' (Sousa, Matsuo, Oliveira e Proença, 2023, p. 13-14).

Em síntese, os autores inferiram que os alunos entenderam que as quantidades de linhas e colunas nas tabelas não se alteraram, apenas os valores numéricos, e que esses valores poderiam ser organizados em uma matriz. Assim, a abordagem do EAMvRP contribuiu para a construção do conhecimento sobre o conceito de matriz, além de favorecer a participação ativa dos alunos no processo de ensino e aprendizagem. Os alunos se organizaram em grupos, debateram, elaboraram e apresentaram diferentes estratégias.

Por fim, a tese de Travassos (2023) teve como objetivo analisar a aprendizagem conceitual e procedimental de inequação polinomial de 1º grau de alunos de uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental no contexto do ensino via resolução de problemas. Este trabalho apresentou uma sequência didática organizada com base nas quatro etapas de organização de ensino sugeridas por Proença (2021).

No contexto do nosso estudo, na primeira etapa, que corresponde ao EAMvRP, as duas primeiras situações de Matemática apresentadas aos alunos não foram reconhecidas como problemas pela maioria deles, mas proporcionaram momentos de reflexão e discussão. Os

resultados mostraram que entre as estratégias mais utilizadas estavam as estratégias aritméticas e o uso do conceito de equação.

Na ação de articulação, o professor-pesquisador leu o enunciado das situações com os alunos, sublinhando as unidades significantes e, em seguida, escreveu uma expressão matemática. A partir dessa expressão, os alunos vivenciaram a articulação entre as estratégias utilizadas, sendo ressaltada a importância de verificar se a resposta encontrada satisfazia a situação proposta. Em seguida, foi introduzida a simbologia relacionada ao conteúdo matemático em questão.

Quanto às outras três etapas da organização de ensino, os resultados indicaram avanços significativos na aprendizagem dos alunos ao longo da implementação da sequência didática. Os alunos identificaram corretamente as unidades significantes (como ‘maior que’ e ‘menor que’), mas os termos ‘quantidade mínima’ e ‘máximo’ apresentaram um percentual menor de conversões corretas para a representação algébrica da inequação.

Por meio desses estudos, é possível perceber que ensinar um conteúdo matemático a partir de um (possível) problema, especialmente com a abordagem do EAMvRP, pode favorecer a aprendizagem. Isso ocorre porque essa abordagem permite que os alunos compreendam a ideia matemática do novo conteúdo em articulação com as estratégias que utilizam para resolver o problema, antes da formalização matemática, contrastando com o processo de memorização e mecanização de procedimentos. Além disso, nessa abordagem, os alunos são incentivados a elaborar e executar estratégias de resolução (Oliveira; Proença, 2020; Rozario, 2022), monitorar suas respostas (Rozario; Silva; Proença, 2023; Travassos, 2023) e trabalhar em grupo, o que contribui para o desenvolvimento de habilidades como o senso de cooperação, criatividade, capacidade de ouvir os outros, respeitar diferentes ideias, discuti-las e apresentá-las (Rozario; Silva; Proença, 2023; Sousa; Matsuo; Oliveira; Proença, 2023).

Por fim, conforme a pesquisa de Pereira, Doneze e Proença (2023), a implementação de uma sequência didática baseada nas cinco ações de Proença (2018) contribui para que o professor identifique os conhecimentos e dificuldades dos alunos, trabalhando para sanar essas dificuldades.

Também é possível perceber que nenhuma das pesquisas que utiliza uma situação de Matemática como ponto de partida com alunos da Educação Básica, utilizando a abordagem do EAMvRP, tem o objetivo de favorecer o ensino e a aprendizagem do conteúdo aritmético de MDC. Isso nos dá uma abertura para realizar a nossa pesquisa. Em seguida, trataremos do ensino deste conteúdo matemático.

Essa revisão busca aprimorar a clareza do texto e sua coesão, além de tornar as conexões entre as ideias mais evidentes

2 ENSINO DO MÁXIMO DIVISOR COMUM

Nesta seção, abordaremos sobre o ensino do conteúdo Máximo Divisor Comum (MDC) no Brasil, exibindo brevemente informações históricas acerca deste conteúdo, o que trazem os documentos oficiais, como os PCN, a BNCC, o Referencial Curricular do Paraná e o CREP, além de pesquisas sobre o tema.

2.1 Informações históricas acerca do MDC

O conteúdo matemático MDC já era estudado pelo matemático Euclides de Alexandria, que viveu por volta de 300 a. C. e publicou em sua obra famosa intitulada “Os elementos”, em 1482, um algoritmo para determinar o MDC de dois números (Boyer, 1974; Garbi, 2010). De acordo com N. Silva (2019, p. 20), “O algoritmo original foi descrito apenas para números naturais e comprimentos geométricos, mas foi generalizado no século XIX para outras classes de números” e é até hoje muito utilizado, tanto na Educação Básica, quanto e, principalmente, no Ensino Superior.

Dos treze livros que constitui a obra de Euclides, o Livro VII é responsável por apresentar o algoritmo mencionado acima da seguinte maneira:

> **Sendo dados dois números não primos entre si, achar a maior medida comum deles.**
> Sejam AB, CD os dois números dados não primos entre si. É preciso, então, achar a maior medida comum dos AB, CD. Se, por um lado, de fato, o CD mede o AB, mas mede também a si mesmo, portanto o CD é uma medida comum dos CD, AB. E é evidente que é também a maior; pois, nenhum maior do que o CD medirá o CD. Se, por outro lado, o CD não mede o AB, dos AB, CD, sendo sempre subtraído de novo o menor do maior terá restado algum número, o qual medirá o antes dele mesmo. Pois, uma unidade não terá restado; e, se não, os AB, CD serão primos entre si; o que não foi suposto. Portanto, terá restado algum número, o qual medirá o antes dele mesmo. E, por um lado, o CD, medindo o BE, reste um menor do que ele mesmo, o EA, e, por outro lado, o EA, medindo o DF, reste um menor do que ele mesmo, o FC, e o CF meça o AE. Como, de fato, o CF mede o AE, e o AE mede o DF, portanto o CF medirá o DF; e mede também a si mesmo; portanto, medirá também o CD todo. E o CD mede o BE; portanto, o CF mede também o BE; e mede também o EA; portanto, medirá também o BA todo; e mede também o CD; portanto, o CF mede os AB, CD. Portanto, o CF é uma medida comum dos AB, CD. Digo, então, que também é a maior. Pois, se o CF não é a maior medida comum dos AB, CD, algum número medirá os números AB, CD, sendo maior do que CF. Meça, e seja o G. E como o G mede o CD, e o CD mede o BE, portanto também o G mede o BE; e mede também o BA todo; portanto, medirá também o AE restante. Mas o AE mede o DF; portanto, o G medirá também o DF; e mede também o DC todo; portanto, também medirá o CF restante, o maior, o menor; o que é impossível; portanto, nenhum número medirá os números AB, CD, sendo maior do que CF; portanto, o CF é a maior medida comum dos AB, CD; [o que era preciso provar].
> COROLÁRIO

> Disso, então, é evidente que, caso um número meça dois números, também medirá a maior medida comum deles; o que era preciso provar (Bicudo, 2009, p. 271-272, grifo da autora).

Atualmente, esse algoritmo é enunciado de maneira diferente e também é conhecido como processo das divisões sucessivas. Além dessa maneira de determinar o MDC, existem outras, como listar os divisores dos números em questão, para, em seguida, indicar os divisores comuns e determinar o maior dentre eles; decompor os números em fatores primos; entre outras. Antes de tudo, é preciso compreender o tema. Assim, optamos pela seguinte definição de Alencar Filho (1981, p. 84, grifo do autor):

> Sejam a e b dois inteiros não conjuntamente nulos ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$). Chama-se *máximo divisor comum de a e b* o inteiro positivo d ($d > 0$) que satisfaz as condições:
> (1) $d \mid a$ e $d \mid b$
> (2) se $c \mid a$ e se $c \mid b$, então $c \leq d$.
>
> Observa-se que, pela condição (1), d é um *divisor comum* de a e b, e pela condição (2), d é o *maior* dentre todos os divisores comuns de a e b.

No entanto, é comum na Educação Básica apresentar somente essa observação feita acima. O Quadro 5 mostra exemplos das definições apresentadas em livros didáticos do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2024.

Quadro 5 - Definições encontradas em livros didáticos

Fonte	Definição
Andrade (2022, p. 19)	"O maior divisor natural comum de dois ou mais números naturais, em que pelo menos um deles seja diferente de zero, é o máximo divisor comum (mdc) desses números"
Bianchini (2022, p. 55, grifo do autor)	"O maior divisor comum de dois ou mais números é chamado de **máximo divisor comum** e representado pelas iniciais **mdc**"
Dante e Viana (2022, p. 59)	"O máximo divisor comum (mdc) de 2 ou mais números naturais é o maior número que é divisor comum desses números"
Giovanni Júnior (2022, p. 22, grifo do autor)	"Dados dois ou mais números naturais, não simultaneamente nulos, denomina-se **máximo divisor comum** desses números o maior dos seus divisores comuns"
Iezzi, Dolce e Machado (2022, p. 14, grifo dos autores)	"O **máximo divisor comum** de dois ou mais números naturais é o maior número que é divisor de todos esses números"
Teixeira (2022, p. 23, grifo da autora)	"Dados dois ou mais números naturais não nulos, denomina-se **máximo divisor comum** (mdc) deles o maior de seus divisores comuns"

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Em seguida, veremos como os documentos curriculares oficiais abordam esse conteúdo matemático.

2.2 MDC em documentos oficiais

Nesta subseção, apresentaremos como o MDC é abordado nos documentos curriculares, como os PCN, a BNCC, o Referencial Curricular do Paraná e o CREP. Nessa direção, temos o documento histórico PCN (Brasil, 1997; 1998) que foram diretrizes que orientaram o planejamento curricular das escolas, indicando objetivos gerais para o Ensino Fundamental, conteúdos conceituais e procedimentais recomendados, critérios de avaliação e algumas orientações didáticas. Em relação ao conteúdo matemático MDC, este documento o apresentava em um bloco denominado ‘Números e Operações’ em que indicava que

> Conceitos como os de “múltiplo” e “divisor” de um número natural ou o conceito de “número primo” podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver (Brasil, 1998, p. 66).

Sendo assim, era recomendado que o conteúdo de MDC de números naturais não fosse trabalhado de forma mecânica, sem que os alunos de fato compreendessem o conceito. Isto é importante para que haja aprendizagem por parte dos alunos e não somente uma memorização de técnicas e procedimentos de cálculo.

No documento vigente, a BNCC (Brasil, 2018) estabelece que o conteúdo de MDC de números naturais está incluído na unidade temática 'Números', no objeto de conhecimento denominado 'Múltiplos e divisores de um número natural'. A habilidade relacionada a esse conteúdo é a EF07MA01, que se refere a 'Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos' (Brasil, 2018, p. 307).

No estado do Paraná, o Referencial Curricular do Paraná (Paraná, 2018) rege todo o Sistema Estadual de Educação Básica. Em relação ao conteúdo matemático mencionado, esse documento apresenta a mesma habilidade da BNCC e, além disso, apresenta dois objetivos de aprendizagem a serem desenvolvidos no 6° ano do Ensino Fundamental, a saber: “Determinar

o MMC e MDC de números naturais" e "Resolver e elaborar problemas envolvendo MMC e MDC de números naturais" (Paraná, 2018, p. 859).

Ainda em âmbito estadual, tem-se o CREP de Matemática (Paraná, 2021), em que faz menção somente a habilidade EF07MA01, sugerindo que tal conteúdo seja trabalhado no 7° ano do Ensino Fundamental, no 1º trimestre letivo. De modo geral, sentimos falta de recomendações mais específicas a respeito de como trabalhar o conteúdo de MDC de números naturais na Educação Básica, já que os documentos parecem apontar somente que deve ser ensinado a resolver e elaborar problemas que envolvam tal conteúdo no início dos anos finais do Ensino Fundamental.

Com isso, percebe-se a necessidade de investigar o ensino do MDC, buscando melhorar cada vez mais a qualidade do ensino brasileiro. Nesse sentido, na subseção seguinte apresentaremos as teses e dissertações brasileiras acerca dessa temática, relacionada com o ensino de MDC.

2.3 Revisão bibliográfica sobre Ensino com RP e MDC

Com o propósito de mapear as produções acadêmicas a respeito do ensino e aprendizagem de MDC por meio da abordagem da Resolução de Problemas, foi realizada no dia 10 de abril de 2024, uma busca em português, no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES[7], e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)[8], as combinações das palavras-chave "Resolução de Problema", "problemas", "Máximo Divisor Comum", "maior divisor comum", "MDC" e "divisor", conforme a Tabela 1. As combinações foram feitas por meio do operador booleano '*and*' que permite que as bases de dados busquem as pesquisas que contém todas as palavras-chave e as aspas servem para que a busca retorne somente as pesquisas que possuem exatamente a expressão digitada.

[7] Disponível em: https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/
[8] Disponível em: https://bdtd.ibict.br/vufind/

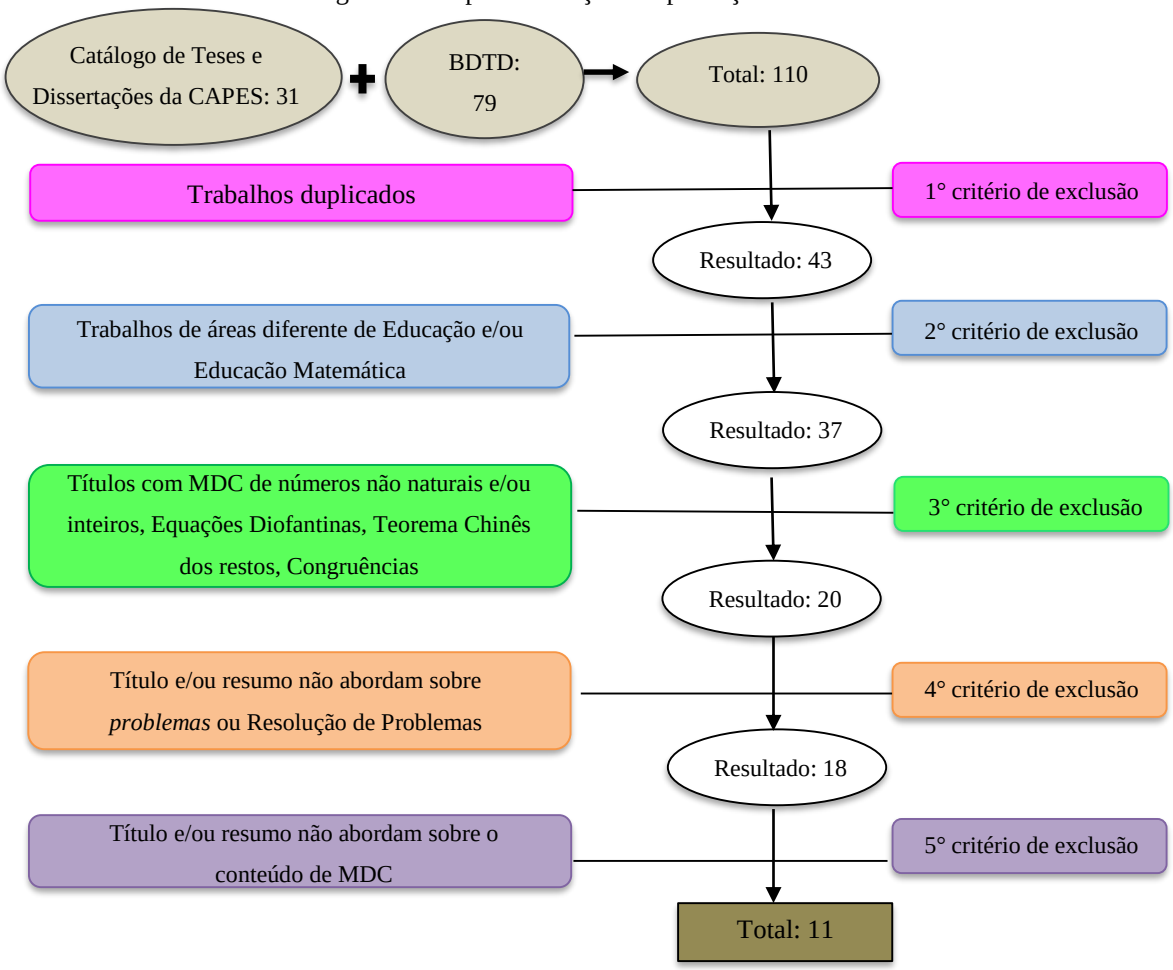
Tabela 1 – Síntese dos resultados obtidos na busca

Palavras-chave	**Especificações**		**Resultados**	
	Catálogo de Teses e Dissertações da Capes	**BDTD**	**Catálogo de Teses e Dissertações da Capes**	**BDTD**
"Resolução de problemas" AND "Máximo Divisor Comum"	Sem especificações	Em todos os campos	4	12
problemas AND "Máximo Divisor Comum"	Sem especificações	Em todos os campos	10	22
Resolução de problemas AND maior divisor comum	Sem especificações	Em todos os campos	1	0
resolução de problemas AND MDC	Sem especificações	Em todos os campos	2	12
resolução de problemas AND divisor	Sem especificações	Em todos os campos	14	33

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Para contemplar de fato as produções relevantes, foram elaborados alguns critérios de exclusão, com base nos pressupostos de Mendes e Pereira (2020). A Figura 3 sintetiza o processo de seleção.

Figura 3 – Etapas de seleção das produções acadêmicas



Fonte: Elaborada pela autora (2024)

Assim, foram selecionados 11 trabalhos, cujos títulos, autores, ano de defesa e programa de pós-graduação estão apresentados no Quadro 6, os quais constituem o corpus de estudo para esta revisão de literatura. Pode-se observar, no quadro a seguir, que todos os trabalhos selecionados correspondem a dissertações de mestrado profissional.

Quadro 6 – Produções acadêmicas analisadas

(continua)

Autor(a)	**Título**	**Ano**	**Programa de Pós-Graduação**
Luciano Alves Carrijo Neto	A pesquisa de aula (*lesson study*) no aperfeiçoamento da aprendizagem em matemática no 6° ano segundo o currículo do estado de São Paulo	2013	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (mestrado profissional)
Alexandre Augusto Cavalcante de Faria	Teoria dos números: uma introdução motivadora direcionada aos docentes do Ensino básico	2015	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT
Márcio Antônio Mota Pinto	MMC E MDC: abordagem e resolução de problemas	2015	PROFMAT

Quadro 6 – Produções acadêmicas analisadas

(conclusão)

Autor(a)	Título	Ano	Programa de Pós-Graduação
Débora Danielle Alves Moraes Priebe	Tópicos de aritmética para as séries finais do ensino fundamental: uma proposta focada na resolução de problemas	2016	PROFMAT
Jair da Silva Matos	Aritmética e aplicações	2017	PROFMAT
Josemar Claudino Barbosa	Teoria dos números no ensino básico: um estudo de caso no 2° ano do ensino médio	2017	PROFMAT
Daniel Sombra da Silva Filho	Teoria dos Números: praticando a resolução de problemas olímpicos	2018	PROFMAT
Luiz Carlos Lemos Junior	O estudo do MDC e MMC por meio de atividades com material concreto, jogos e a "plataforma" Arduino	2019	PROFMAT
Vitorio Batista Lima da Silva	Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum: Proposta de Sequência Didática Baseada na Resolução de Problemas	2019	PROFMAT
Francisco Rutemberg da Silva Rodrigues	Teoria dos Números: um estudo de resolução de problemas da OCM do nível 3	2020	PROFMAT
Zenilson Alves dos Santos	A teoria dos números na perspectiva da OBMEP	2020	PROFMAT

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Após a seleção dos trabalhos, foi realizada a leitura completa de todos eles, e para melhor organização, os trabalhos foram divididos em dois temas: os que apresentaram resultados de uma implementação em sala de aula e os que propuseram sugestões de problemas a serem utilizados.

Das 11 dissertações, 4 apresentaram resultados de implementações na Educação Básica (Carrijo Neto, 2013; Pinto, 2015; Barbosa, 2017; Lemos Junior, 2019), enquadrando-se no primeiro tema. Nesse grupo, apenas a dissertação de Carrijo Neto (2013) abordou a resolução de problemas de um ponto de vista metodológico, como será detalhado a seguir.

No trabalho de Carrijo Neto (2013), foram discutidas teoricamente as metodologias de Pesquisa de Aula (Lesson Study), originária do Japão, e Resolução de Problemas, baseada na proposta de Polya (1995). A partir dessas bases metodológicas, o autor analisou o *Caderno do Aluno: Matemática – 6º ano do Ensino Fundamental*, material disponibilizado pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo. Ele constatou que algumas das atividades não estavam alinhadas aos objetivos propostos pelo currículo paulista e sugeriu alterações.

Além disso, Carrijo Neto (2013) elaborou sete atividades didáticas fundamentadas na Resolução de Problemas de Polya (1995) e as implementou em duas turmas de 6º ano do Ensino Fundamental, abordando temas como multiplicação, divisão, MDC, frações e figuras geométricas planas. Antes de implementar a atividade relacionada ao MDC, o autor fez um

planejamento detalhado, descrevendo como cada etapa da metodologia deveria ocorrer. Com a implementação, o autor ressaltou que

> Metodologia de Pesquisa de Aula (*Lesson Study*) aliada à Metodologia de Resolução de Problemas serviu como facilitadora desse processo, já que ao colocar o foco da aprendizagem na mão do aluno o professor pode observar melhor a dinâmica da sala de aula, verificando quais alunos estão realizando as atividades propostas e como estão realizando; e quais não estão. [...] O que se verificou foi uma maior participação dos alunos nas aulas, principalmente de alunos tidos como indisciplinados, gerando menos indisciplina e consequentemente aumentando a média geral das notas nessas turmas (Carrijo Neto, 2013, p. 136-137).

Pinto (2015) buscou abordar o estudo de MMC e MDC de números inteiros, com problemas contextualizados. Após uma seção teórica a respeito de conjuntos e divisibilidade, o trabalho de Pinto (2015) possui uma seção intitulada 'Resolução de Problemas', em que foram apresentados resultados de implementações realizadas em turmas diferentes e sugestões de problemas contextualizados, com o propósito de fornecer um material de consulta para discentes e docentes. Na implementação, o primeiro problema foi retirado de um livro didático cujo tema era equações diofantinas, no segundo problema, a solução envolvia o conceito de MMC, que foi resolvido por alunos de 6°/7° ano do EJA (Educação de Jovens e Adultos), e, por fim, o terceiro problema foi resolvido por alunos de uma turma de ensino regular do 6° ano sobre o MDC. Em relação a este último, constatou-se três diferentes estratégias de solução: 1 - listar os divisores, para encontrar os divisores comuns e por fim indicar o maior deles; 2 – decompor em fatores primos; 3 – usar o algoritmo de Euclides.

Barbosa (2017) apresentou resultados de um curso ofertado a alunos do 4° período de um curso técnico equivalente ao 2° ano do Ensino Médio regular, com objetivo de possibilitar a aprendizagem de alguns tópicos da Teoria dos Números. Desse modo, o pesquisador aplicou ao início e ao final do curso testes para avaliar a aprendizagem, curso este que contou com 10 temas diferentes, porém relacionados, no qual um deles era o MDC de números inteiros, e na análise das questões, apresentou algumas das resoluções dos alunos.

Sobre o MDC, em uma das atividades do teste inicial, foi proposto um problema contextualizado, no qual 33,4% dos alunos acertaram. Nesse teste foi possível verificar que, "apesar do ensino de alguns conceitos básicos da teoria dos números fazerem parte do currículo obrigatório do ensino básico, tais conceitos não são vistos de forma aprofundada neste nível de ensino" (Barbosa, 2017, p. 14). Nas aulas ministradas pelo pesquisador, os alunos tiveram que resolver exercícios, problemas e utilizaram seus conhecimentos em um jogo, chamado de 'Jogo Baralho do MDC'. Com o teste aplicado após o curso, verificou-se que todos os alunos

acertaram o problema de MDC, no qual pôde-se inferir que houve “[...] um avanço significativo dos educandos participantes do curso” (Barbosa, 2017, p. 99).

O trabalho de Lemos Junior (2019) é estruturado da seguinte forma: fundamentação teórica, fundamentação matemática e, por fim, as atividades desenvolvidas. Estas atividades foram aplicadas a alunos de 6° e 7° ano do Ensino Fundamental, cujos assuntos permearam as ideias de múltiplos e divisores de números naturais. Uma delas se referia a utilizar material concreto para confeccionar um jogo de memória, ou seja, os alunos teriam que calcular o MDC para encontrar o tamanho ideal dos cartões do jogo. Durante a implementação, Lemos Junior (2019, p. 50) constatou que

> [...] percebeu-se uma ótima participação dos alunos. Eles se sentiram desafiados com a situação apresentada e empenhados em descobrir o melhor tamanho possível para os cartões. Do mesmo modo, tentaram utilizar estratégias para o cálculo do mdc, como o uso da Propriedade 2.8.1 do Capítulo 2 [MDC de um número e um de seus múltiplos é o próprio número]. Também utilizaram a tecnologia, como o uso do aplicativo no celular para verificar os resultados dos mdc.

As demais atividades, envolvendo o MMC e utilizando a plataforma de desenvolvimento de projetos eletrônicos Arduino, também foram desenvolvidas de maneira satisfatória, com os alunos demonstrando grande motivação. O autor observou que "a aplicação do trabalho foi muito proveitosa e teve um impacto positivo nas aulas. Conteúdos que, às vezes, são apenas apresentados de forma teórica, puderam ser trabalhados de maneira divertida e prática. Acredita-se, portanto, que os alunos obtiveram um aprendizado mais efetivo" (Lemos Junior, 2019, p. 67).

Dentre as quatro produções mencionadas, consideramos que apenas a de Carrijo Neto (2013) abordou explicitamente os pressupostos da resolução de problemas, baseados em Polya (1995), que propõe uma abordagem semelhante à do ensino da resolução de problemas. Por outro lado, as produções de Pinto (2015), Barbosa (2017) e Lemos Junior (2019) não tiveram como temática central a resolução de problemas, já que se limitaram a apresentar resoluções de atividades envolvendo o MDC.

Quanto ao segundo tema, que engloba as dissertações que não apresentaram uma implementação prática na educação básica, mas sugeriram problemas a serem resolvidos por alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio, estão sete trabalhos. São eles: Faria (2015), Priebe (2016), Matos (2017), Silva Filho (2018), V. Silva (2019), Rodrigues (2020) e Santos (2020). Desses, apenas o trabalho de V. Silva (2019) abordou a resolução de problemas de um

ponto de vista metodológico. A seguir, discutiremos os trabalhos que se enquadram neste segundo tema.

Faria (2015), embora não tenha apresentado resultados de uma implementação em sala de aula, apresentou sugestões de atividades para serem desenvolvidas com alunos a partir do 7° ano do Ensino Fundamental. Além disso, evidenciou definições, propriedades, exemplos e resultados do conjunto dos números inteiros, divisibilidade, MDC, números primos, Equações Diofantinas Lineares e Congruências Modulares. Também apresentou uma 'miscelânea olímpica', isto é, problemas de nível olímpicos com suas resoluções, e propôs sugestões de atividades, três delas envolvendo o MDC. A primeira destas atividades era composta por diversos exercícios, cujos objetivos foram "Revisar conteúdo relacionado a divisor, divisor comum e máximo divisor comum de dois ou mais números usando a decomposição por primos; Aprofundar algumas propriedades do mdc" (Faria, 2015, p. 159). A segunda atividade, constituída por um exercício e quatro problemas, tinha como objetivo calcular o MDC pelo algoritmo de Euclides e, por fim, a terceira atividade consistia de um exercício para determinar o MDC pelo processo de divisões sucessivas e exercícios que apenas utilizavam o MDC para verificar se as equações diofantinas lineares tinham solução.

Com uma ideia semelhante, V. Silva (2019) apresentou uma proposta de sequência didática para o ensino de MDC e MMC através da resolução de problemas, para o 6° ano do Ensino Fundamental, que pretendia futuramente ser aplicada em sala de aula. Os cujos objetivos desta proposta foram oportunizar aos alunos criar suas próprias resoluções e possibilitar diferentes estratégias, explorando conceitos e ideias matemáticas envolvidas nos conteúdos MMC e MDC e também em outras situações problemas. O trabalho foi estruturado de maneira que inicialmente se abordaram aspectos históricos, em seguida fundamentos matemáticos (conjunto dos números naturais, divisibilidade dos números inteiros e números primos), fundamentos teóricos a respeito da resolução de problemas e, por fim, a proposta de ensino.

Em relação à resolução de problemas, o autor primeiramente defendeu o que entende por problema matemático e suas características, a saber:

> • Deve ser desafiante e interessante a partir de uma perspectiva matemática; • Precisa ser adequado, ou seja, que possa aproveitar o conhecimento que os alunos já têm de modo que, o novo conhecimento e as capacidades de cada aluno, possam ser adaptados e aplicados com o intuito de completar tarefas; • Precisa partir de algo que faz sentido, bem como o caminho para a solução não esteja completamente visível (V. Silva, 2019, p. 35).

Em seguida, explicou as quatro etapas de como resolver um problema, segundo Polya e os tipos de problemas, de acordo com Dante (2005). O capítulo que apresentou a proposta didática foi intitulado ‘Ensinando MDC e MDC via resolução de problemas’ (acreditamos que houve um erro de digitação e o primeiro conteúdo citado seria MMC). De acordo com o autor,

> [...] para o ensino do máximo divisor comum (MDC) e do mínimo múltiplo comum (MMC), a resolução de problemas numa perspectiva metodológica pode propiciar o real entendimento de conteúdo matemático de grande importância para as séries posteriores ao sexto ano, como ampliar os conhecimentos sobre divisão, números primos e a construção de algoritmos (V. Silva, 2019, p. 51).

Embora não tenha sido mencionada uma série escolar específica, Priebe (2016) também apresentou uma proposta de inserção de tópicos da Teoria dos Números, incluindo o MDC, na Educação Básica. Além disso, trouxe noções teóricas sobre esses tópicos, mas os problemas relacionados a esses conteúdos não estavam organizados em uma seção ou capítulo separado. Ao contrário, os problemas foram distribuídos ao longo do texto, acompanhados de suas respectivas soluções. Embora o título da dissertação inclua a expressão ‘resolução de problemas’, a autora não apresentou uma fundamentação específica sobre esse tema. Em resumo, o trabalho apresentou “os aspectos mais importantes da teoria, ilustrados com exemplos e desafiando os alunos com problemas de diversos níveis de dificuldade [...] [e] buscou-se, com sucesso, a inserção de problemas como parte do processo de ensino” (Priebe, 2016, p. 71), considerando-os pouco abordados no Ensino Fundamental, mas frequentemente exigidos em olimpíadas.

As dissertações de Rodrigues (2020) e Santos (2020) compartilham algumas características, como a exposição de definições, exemplos e propriedades, demonstração de proposições e teoremas sobre tópicos da Teoria dos Números, incluindo o conteúdo de MDC de números inteiros, além da apresentação e resolução de problemas olímpicos. Esses problemas foram propostos como um banco de questões para consulta e para serem utilizados em sala de aula.

Uma diferença notável entre essas dissertações é que uma se concentra em problemas oriundos da OCM (Olimpíada Cearense de Matemática), os quais não envolvem o MDC, enquanto a outra foca nos problemas da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), incluindo questões cuja resolução envolve o MDC. A dissertação de Rodrigues (2020) apresentou uma proposta de “[...] sequência didática, por meio de problemas oriundos da OCM, que pode ser trabalhada em sala de aula para complementar os conceitos de aritmética tradicionalmente abordados no Ensino Fundamental” (Rodrigues, 2020, p. 73). Por

outro lado, Santos (2020) abordou as etapas da resolução de problemas propostas por Polya, destacando que “Essas etapas são fundamentais para que o estudante obtenha êxito na resolução de problemas, cabendo ao professor auxiliá-los nessa tarefa, proporcionando as condições necessárias para dar-lhes a autonomia requerida” (Santos, 2020, p. 9), embora não tenha mencionado essas etapas ao longo dos problemas apresentados.

Assim como nos dois trabalhos anteriores, Matos (2017) e Silva Filho (2018) organizaram seus trabalhos de conclusão de curso de pós-graduação apresentando uma fundamentação matemática e exercícios resolvidos. Os exercícios apresentados por Matos (2017) foram retirados de Exames Nacionais de Qualificação para o ingresso ao PROFMAT, e apenas um se referiu especificamente ao MDC de números inteiros positivos, cuja resolução utilizou as divisões sucessivas e o lema de Euclides. Nas considerações finais, o autor afirmou que as fundamentações matemáticas expostas “[...] se mostraram ser grande ferramenta em resolução de problemas” (Matos, 2017, p. 58).

O trabalho de Silva Filho (2018) foi direcionado a alunos do Ensino Médio e alunos dos anos iniciais de graduação em Matemática e/ou Computação, e não apresentou propostas de ensino, pelo contrário, trata-se de um material composto por resultados de tópicos da Teoria dos Números. O conteúdo de MDC de números inteiros, entre outros assuntos, foi abordado na primeira seção teórica da dissertação de Silva Filho (2018) e, posteriormente, uma coleção de problemas com propostas de resoluções, no qual o autor ressaltou que poderia haver outras perspectivas resolutivas, cujo objetivo foi “[...] fornecer possíveis caminhos na solução de questões com um grau maior de dificuldade, na maior parte das vezes problemas de olimpíadas [...]” (Silva Filho, 2018, p. 22). No entanto, apenas um desses problemas precisava de propriedades do MDC e outros resultados para resolvê-lo, isto é, não se tratou de um problema específico de MDC. Neste caso, era preciso conhecer o conteúdo matemático para depois resolver o problema.

Ainda neste trabalho foram apresentados resultados de congruências modulares e uma outra coleção de problemas, que por sua vez poderiam ser resolvidos “[...] a partir da teoria apresentada ao longo deste texto” (Silva Filho, 2018, p. 68). Nenhum desses problemas, assim como os da primeira coleção de problemas, eram contextualizados. Em suma, Silva Filho (2018) apresentou resultados importantes da Teoria do Números, que “[...] foram aplicados através da resolução de diversos problemas propostos em competições e olimpíadas de Matemática” (Silva Filho, 2018, p. 86), embora a palavra ‘através’ aqui utilizada não tenha o mesmo sentido de Schroeder e Lester Junior (1989).

Dentre as 7 produções, apenas a dissertação de V. Silva (2019) abordou pressupostos da resolução de problemas, apresentando a 'Resolução de Problemas sob um ponto de vista metodológico' (V. Silva, 2019, p. 38), o que se alinha ao conceito de ensino por meio de resolução de problemas, conforme caracterizado por Schroeder e Lester Junior (1989). Por sua vez, a dissertação de Santos (2020), embora mencione as etapas para resolver um problema de acordo com Polya, não as aplica especificamente aos problemas propostos. As produções de Faria (2015), Priebe (2016), Matos (2017), Silva Filho (2018) e Rodrigues (2020), por outro lado, se limitam a apresentar uma lista de problemas com suas respectivas soluções e/ou sugestões de atividades envolvendo o MDC.

Em nossa busca, constatamos que, com exceção de dois trabalhos, os demais trataram as atividades como problemas de maneira aplicacionista, usando o termo 'resolução' apenas como sinônimo de solução. Dessa forma, os autores estavam mais preocupados em apresentar as soluções para os 'problemas'. Caso os professores da Educação Básica utilizem essas dissertações, de maneira geral, para implementá-las em sala de aula, concordamos com a análise de Proença e Maia-Afonso (2020) em seu estudo bibliográfico sobre propostas de ensino via resolução de problemas em dissertações de mestrado profissional. Eles afirmam que '[...] podem realizar aulas focadas apenas na parte de aplicação de conteúdos matemáticos, acreditando, assim, que estariam favorecendo a construção de conhecimento' (Proença; Maia-Afonso, 2020, p. 198).

Por outro lado, foi possível constatar que apenas as dissertações de Carrijo Neto (2013) e V. Silva (2019) abordaram a resolução de problemas como ferramenta de ensino para o conteúdo de MDC. Assim, a nossa pesquisa se diferencia das pesquisas encontradas nesta revisão bibliográfica, principalmente por adotar a abordagem de ensino via resolução de problemas. Além disso, optamos por não apresentar as propriedades do MDC, pois nosso objetivo não é esse, mas sim, introduzir a ideia do conteúdo.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta seção, serão mencionadas a natureza e a modalidade da pesquisa, bem como a descrição dos participantes e o contexto. Além disso, apresentaremos a proposta de ensino e seu planejamento. Em seguida, discorreremos sobre os instrumentos e técnicas de produção de dados, e, por fim, sobre os procedimentos para produção e análise dos dados.

3.1 Natureza e modalidade da pesquisa

Para alcançar os objetivos desta pesquisa, adotamos uma metodologia de pesquisa qualitativa, já que "[...] os pesquisadores que utilizam métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores [...]" (Gerhardt; Silveira, 2009, p. 32).

Bogdan e Biklen (1994, p. 47) indicam um conjunto de particularidades necessárias para distinguir uma pesquisa de caráter qualitativo, a saber:

> (i) Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; (ii) A investigação qualitativa é descritiva; (iii) Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; (iv) Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; (v) O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

A modalidade adotada é a de pesquisa de campo, pois para a realização deste estudo a pesquisadora teve uma "[...] experiência direta com a situação de estudo" (Gil, 2002, p. 53), isto é, compareceu ao local natural onde as aulas de Matemática ocorrem. De acordo com Tozoni-Reis (2009, p. 28), "a pesquisa de campo em educação, portanto, caracteriza-se pela ida do pesquisador ao campo, aos espaços educativos [...] com o objetivo de compreender os fenômenos que nele ocorrem".

3.2 Participantes e contexto da pesquisa

Participaram desta pesquisa 30 alunos de uma turma do 6° ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública de ensino, localizada em uma cidade da região norte do estado do Paraná. Tal instituição foi fundada em 1959, ofertando a 1ª a 8ª série do Ensino Fundamental,

o que hoje é denominado anos iniciais e finais do Ensino Fundamental. Apenas em 2021 é que a escola passou a ofertar o Ensino Médio.

Foi neste mesmo ano, durante a pandemia, que esta escola adotou o modelo de escola cívico-militar. Esse modelo, de acordo com o site da Secretaria da Educação do Paraná[9], tem por objetivo "ofertar uma educação básica de qualidade [...] e que promova a melhoria do processo de ensino-aprendizagem, [...] e o fortalecimento de valores humanos e cívicos". Atualmente, em 2025, oferta as modalidades de anos finais do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Educação Especial, no período da manhã e da tarde, totalizando 544 matrículas e cerca de 50 professores licenciados.

Nossa pesquisa foi implementada em uma turma de 6° ano do Ensino Fundamental, pois é neste ano escolar que o Referencial Curricular do Paraná (Paraná, 2018) indica trabalhar o conteúdo de MDC. Pelo fato de a pesquisadora não ser professora da turma em que a proposta foi implementada, as aulas foram desenvolvidas pela pesquisadora, mas contou com a presença da professora regente.

Os alunos que aceitaram participar voluntariamente desta pesquisa têm, em média, 10 anos de idade. Este aceite se deu por meio da assinatura dos alunos no Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) e da assinatura dos responsáveis no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). Estes documentos foram elaborados seguindo as exigências éticas do comitê de pesquisas com seres humanos e se encontram nos Apêndices A e B, respectivamente. As fotografias, áudios e registros produzidos são utilizados de forma que as identidades são mantidas em sigilo, preservando a privacidade dos envolvidos e salvaguardando a confiabilidade firmada nos documentos assinados, cujo projeto foi aprovado pelo COPEP - Comitê Permanente de Ética em Pesquisa com Seres Humanos, e se encontra no Anexo 1.

3.3 Instrumentos e técnicas de produção de dados

Com o propósito de atingir os objetivos específicos da pesquisa, foram utilizados os seguintes instrumentos e técnicas de produção e registro de dados:

a) gravações de áudio das aulas ministradas pela pesquisadora, para registrar as falas, dúvidas, motivações e participações dos alunos, que depois foram transcritas, uma vez que "A gravação tem a vantagem de registrar todas as expressões orais, imediatamente [...] (Ludke; Andre, 1986, p. 37);

[9] Disponível em: https://www.educacao.pr.gov.br/colegios_civico_militares. Acesso em: 15 abr. 2024

b) fotos e escritas das resoluções dos alunos. Essa maneira de registrar foi "[...] utilizada como um meio de lembrar e estudar detalhes que poderiam ser descurados se uma imagem fotográfica não estivesse disponível para os reflectir" (Bogdan; Biklen, 1994, p. 189);

c) diários de aula, que são

> [...] documentos em que professores e professoras anotam suas impressões sobre o que vai acontecendo em suas aulas. A definição é voluntariamente aberta para conter os diversos tipos de diários, tanto pelo conteúdo que recolhem as anotações como pela forma como se realiza o processo de coleta, redação e análise da informação (Zabalza, 2004, p. 13).

d) questionário, que é um instrumento de produção de dados "[...] constituído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito [...]" (Marconi; Lakatos, 2003, p. 201). Foram utilizados dois questionários, constituídos de questões abertas que possibilitam compreender o comportamento e as compreensões dos alunos acerca da situação de Matemática e se encontram nos Apêndices C e D. Os questionários, assim como a situação de Matemática, foram validados com membros do grupo de estudos GERPEM.

3.4 Proposta de ensino e planejamento

Nesta subseção, apresentaremos o planejamento da proposta de ensino de nossa pesquisa. A proposta foi elaborada a partir das cinco ações do EAMvRP de Proença (2018). Cada uma dessas ações será descrita a seguir.

Escolha do problema: A situação de Matemática (possível problema) apresentada no Quadro 7 foi elaborada visando introduzir o conteúdo de MDC de números naturais.

Quadro 7 – Situação de Matemática

A professora de Educação Física está planejando fazer uma gincana com as turmas dos 6° anos A e B e precisa da ajuda de vocês para dividir os alunos em grupos. O 6º ano A possui 42 alunos, enquanto o 6º ano B possui 36 alunos. Sabendo que o número de integrantes dos grupos da turma A tem que ser o mesmo número de integrantes da turma B, qual a quantidade máxima de alunos que cada grupo pode ter? Vamos trabalhar juntos para ajudar a professora!

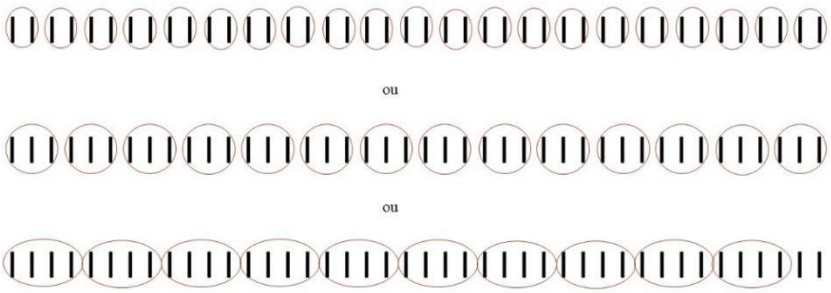
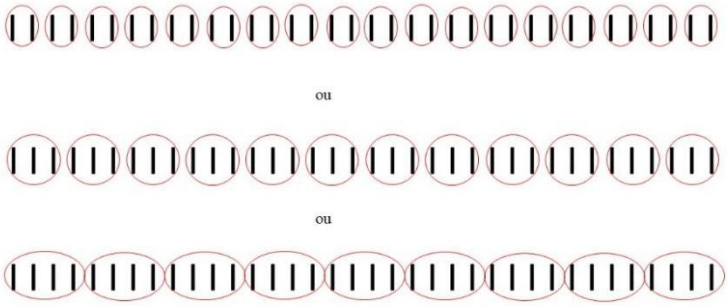
Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Essa situação de Matemática pode ser resolvida por diversos caminhos/estratégias, como, por exemplo, as indicadas no Quadro 8. O intuito dessa previsão, conforme aponta Proença (2018, p. 47), é "evitar um trabalho que não leve em consideração o que os alunos fazem pelo fato de o próprio professor desconhecer o conceito ou procedimento empregado como estratégia ou mesmo por não entender o raciocínio [...]".

As estratégias de decomposição em fatores primos (simultânea e individual), mostradas no Quadro 8, a seguir, levam à solução da situação de Matemática proposta, no entanto, é pouco provável que os alunos as utilizem. Pode acontecer, por exemplo, de um ou outro aluno apresentar essa estratégia por ter visto no ano anterior, no caso de aluno repetente ou transferido de outra escola e/ou ter visto como "truques" nas redes sociais, como no *TikTok* ou *Youtube*. Nesses casos, provavelmente não haverá uma compreensão da estratégia e, sim, uma mecanização.

Quadro 8 – Possíveis estratégias

(continua)

Estratégias	
<u>Desenho</u>: Esta estratégia consiste em representar visualmente as quantidades de alunos das turmas (em palitos, por exemplo) e agrupá-las de diferentes maneiras (como por exemplo, em grupos de 2,3 e 4) para ver como os grupos podem ser formados em cada turma. Obs.: Os alunos também podem agrupar somente de uma maneira, não necessariamente com a maior quantidade.	Turma do 6° ano A  ... Turma do 6° ano B  ... Realizando vários agrupamentos e levando em consideração que não faz sentido formar grupos muito grandes para uma gincana, percebe-se que para não sobrar alunos da turma A pode ser formados grupos com 2,3,6 e 7 e para não sobrar alunos da turma B, os grupos podem ser de 2,3,4,6 e 9 integrantes. Como a professora quer que os grupos tenham a mesma quantidade em ambas as turmas, estes podem ser formados por 2, 3 e 6 alunos. **Resposta esperada**: Cada grupo pode ter no máximo 6 integrantes.
<u>Tentativa e erro:</u> Esta estratégia consiste em efetuar divisões, considerar os números que são divisíveis por 42 e 36 ao mesmo tempo e por fim, indicar o maior desses números. Obs.: Alguns alunos podem não necessariamente efetuar todas as divisões e nem nessa ordem.	Divisões de 42: 42 | 2 / -42 / 21 / 0 42 | 3 / -42 / 14 / 0 42 | 4 / -40 / 10 / 2 42 | 5 / -40 / 8 / 2 42 | 6 / -42 / 7 / 0 42 | 7 / -42 / 6 / 0 42 | 8 / -40 / 5 / 2 42 | 9 / -36 / 4 / 6 42 | 10 / -40 / 4 / 2 42 | 11 / -33 / 3 / 9 42 | 12 / -36 / 3 / 6 42 | 13 / -39 / 3 / 3 ... ... Divisões de 36: 36 | 2 / -36 / 18 / 0 36 | 3 / -36 / 12 / 0 36 | 4 / -36 / 9 / 0 36 | 5 / -35 / 7 / 1 36 | 6 / -36 / 6 / 0 36 | 7 / -35 / 5 / 1 36 | 8 / -32 / 4 / 4 36 | 9 / -36 / 4 / 0 36 | 10 / -30 / 3 / 6 36 | 11 / -33 / 3 / 3 36 | 12 / -36 / 3 / 0 36 | 13 / -26 / 2 / 10 ... ... O maior número que dividido por 42 e por 36 dá resto 0 é o número 6. **Resposta esperada:** Os grupos deverão ter no máximo 6 integrantes.

Quadro 8 – Possíveis estratégias

(conclusão)

<table>
<tr><th colspan="2">Estratégias</th></tr>
<tr><td>Quadro:

Consiste em elaborar um quadro para cada turma com a quantidade de grupos e a quantidade de integrantes em cada um, visando compará-los.

Obs.: Pode acontecer de não aparecer grupos com 1, 42 e 36 integrantes.</td><td>

Turma do 6° ano A
(42 alunos no total)

Quant. de grupos	Quant. de integrantes
1	42
2	21
3	14
6	7
7	6
14	3
21	2
42	1

Turma do 6° ano B
(36 alunos no total)

Quant. de grupos	Quant. de integrantes
1	36
2	18
3	12
4	9
6	6
9	4
12	3
18	2
36	1

Os grupos com a mesma quantidade de integrantes no 6° ano A e no 6° ano B (pintados em azul) são de 6 integrantes, de 3 integrantes, de 2 integrantes e de 1 integrante. A maior quantidade possível de integrantes nos grupos é 6.
Resposta esperada: Os grupos deverão ter no máximo 6 integrantes.
</td></tr>
<tr><td>Lista de divisores:

Consiste em listar os divisores, identificar os divisores comuns e apontar o maior deles.</td><td>

A turma do 6° ano A pode ter grupos com 1,2,3,6,7,14,21 e 42 integrantes. Assim,

$$D(42) = \underbrace{\{1,2,3,6,7,14,21,42\}}_{\text{divisores de 42}}.$$

A turma do 6° ano B pode ter grupos com 1,2,3,4,6,9,12,18 e 36 integrantes. Assim,

$$D(36) = \underbrace{\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}}_{\text{divisores de 36}}.$$

Os divisores comuns de 42 e 36 são DC (42,36) = {1,2,3,6}.
Como a professora deseja formar grupos com a maior quantidade possível de alunos, os grupos deverão ter 6 integrantes.
Resposta esperada: Os grupos deverão ter no máximo 6 integrantes.
</td></tr>
<tr><td>Decomposição em fatores primos – simultânea:

Consiste em decompor simultaneamente.

Obs.: Pouco provável de ser utilizada</td><td>

Fazendo as divisões temos que

42, 36	2
21, 18	2
21, 9	3
7, 3	3
7, 1	7
1, 1	

Os números que dividem 42 e 36 ao mesmo tempo são 2 e 3. Assim, o MDC (42,36) = 2 x 3 = 6.
Resposta esperada: Os grupos deverão ter no máximo 6 integrantes.
</td></tr>
<tr><td>Decomposição em fatores primos – individual:

Consiste em escrever os números como uma multiplicação de fatores primos.

Obs.: Pouco provável de ser utilizada.</td><td>

Temos que

42	2
21	3
7	7
1	

e

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Escrevendo de outro modo temos:

$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

e

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

Os fatores comuns de 42 e 36 são 2 e 3. Assim, o MDC (42,36) = 2 x 3 = 6.

Resposta esperada: Os grupos deverão ter no máximo 6 integrantes.
</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Tendo em vista as estratégias que podem ser utilizadas, é fundamental identificar os conhecimentos prévios (conceitos, procedimentos e princípios matemáticos adquiridos anteriormente) que os alunos precisam ter para resolver a situação de Matemática proposta. Assim, para a situação em questão, entre esses conhecimentos estão a compreensão das operações de multiplicação e divisão, o algoritmo da divisão, o significado do resto da divisão, e os conceitos de divisor, divisor comum e números primos.

Além desses conhecimentos prévios, ao resolver um possível problema, os alunos seguem o processo de resolução de problemas, que é composto por quatro etapas: "Representação" (compreensão do "problema"), "Planejamento" (apresentação de uma estratégia de solução), "Execução" (execução da estratégia) e "Monitoramento" (verificar a resposta e revisar todo o processo de resolução). Nessas etapas, estão presentes os conhecimentos linguísticos, semânticos, esquemáticos, estratégicos e procedimentais (Proença, 2018).

O Quadro 9 apresenta os conhecimentos necessários para resolver a situação de Matemática proposta aos participantes de nossa pesquisa.

Quadro 9 – Tipos de conhecimentos

Etapas	**Tipos de conhecimentos**	**Significado**	**Conhecimentos na situação de Matemática proposta**
Representação	Linguísticos	Compreensão das condições do enunciado	*gincana, mesmo número de integrantes*
	Semânticos	Compreensão matemática dos significados das palavras	*dividir, mesmo número, quantidade máxima*
	Esquemáticos	Compreensão da natureza do problema	Situação de aritmética envolvendo divisões
Planejamento	Estratégicos	Uso de estratégias	Desenho, Tentativa e erro, Quadro, Lista de divisores, Decomposição em fatores primos (1ª coluna do Quadro 8)
Execução	Procedimentais	Execução da estratégia	Execução do algoritmo de divisão e dos cálculos matemáticos de multiplicação (2ª coluna do Quadro 8)
Monitoramento	-	Verificação da resposta apresentada e revisão da resolução	Resposta conforme a pergunta do enunciado (quantidade máxima de integrantes); Revisão das divisões com a prova real (multiplicações)

Fonte: Elaborada pela autora (2024)

<u>Introdução do problema:</u> Para introduzir o problema aos alunos, a pesquisadora deverá pedir para os alunos se organizarem em grupos, distribuir a folha contendo a situação de Matemática e pedir para eles resolverem da maneira que acharem conveniente.

A organização em grupos auxilia a professora/pesquisadora analisar mais detalhadamente cada estratégia que os alunos utilizam para resolver a situação de Matemática, permite que os alunos fiquem mais à vontade para compartilhar suas ideias, experiências e conhecimentos, além de exercitar a cooperação e desenvolver o senso crítico (Piletti, 1985; Proença, 2018).

Auxílio aos alunos durante a resolução: Enquanto os alunos resolvem a situação de Matemática, a professora/pesquisadora deve observar o uso dos conhecimentos dos grupos e suas dificuldades, incentivar a busca de uma solução, fazendo questionamentos e direcionar os alunos à uma estratégia prevista, isto é, agir como observadora, incentivadora e direcionadora. É importante a professora estar preparada para tirar eventuais dúvidas e corrigir possíveis equívocos dos alunos. O Quadro 10 apresenta algumas das possíveis respostas que a professora pode dar para sanar algumas dúvidas e qual o papel ela desempenha em cada resposta.

Quadro 10 – Possíveis erros, dúvidas e respostas

Possíveis erros e dúvidas	**Possíveis respostas**	**Papel**
Dividir as turmas de uma única maneira, seja por meio de desenhos (agrupamentos) ou pelo algoritmo da divisão	Perguntar se aquela maneira é a única forma de dividir as turmas, isto é, questionar se não há outra maneira de formar os grupos, conduzindo esgotar as possibilidades.	Direcionadora
Misturar os alunos das duas turmas, isto é, formar grupos cujos integrantes são alunos do 6° ano A e do 6° ano B	Pedir para ler novamente o enunciado, enfatizando a frase “Sabendo que o número de integrantes dos grupos da turma A tem que ser o mesmo número de integrantes da turma B”. Se ainda houver dúvida, questionar se a frase faria sentido se em um mesmo grupo tivesse alunos das duas turmas.	Incentivadora
Dificuldade em começar a resolver	Pedir que converse com seu grupo para encontrar uma maneira de resolver	Observadora e incentivadora
Persistência na dificuldade em começar a resolver	Direcionar a uma estratégia prevista, como: *Primeiro pensem na turma do 6° ano A, quantos grupos podem ser formados e quantos alunos vão ter em cada grupo? Depois pensem dessa forma para a turma do 6° ano B.*	Direcionadora
Dificuldade no algoritmo da divisão	Pedir para fazer a prova real, isto é, para realizar a operação inversa (multiplicação).	Incentivadora
Confundir a quantidade de integrantes por grupo com a quantidade de grupos	Pedir para ler novamente o enunciado e esclarecer que o que importa são quantos alunos vão ter em cada grupo e não quantos grupos vão ser formados.	Incentivadora
Não considerar a pergunta do enunciado, isto é, responder que os grupos podem ser organizados de mais de uma maneira	Pedir para ler novamente o enunciado e perguntar o que a questão pede.	Incentivadora
Responder apenas com número, sem o contexto	Perguntar o que o número significa naquela situação de Matemática, induzindo uma resposta contextualizada em língua natural	Observadora e direcionadora

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Discussão das estratégias dos alunos: Enquanto a professora/pesquisadora estiver observando as estratégias dos grupos, ela deverá organizar a ordem de apresentação dos grupos, começando com a estratégia menos utilizada. Quando os alunos terminarem de resolver, os grupos irão apresentar suas estratégias em uma parte da lousa, se possível de modo que não precise apagá-las para dar espaço ao outro grupo e se persistir algum equívoco/erro, a professora deve corrigi-los. Proença (2018, p. 52) afirma que essa socialização deve ocorrer "de modo que os alunos possam perceber e construir relações entre os conhecimentos que utilizaram". Feito isso, deverá ser entregue aos alunos uma folha para que respondam individualmente a seguinte questão (Quadro 11):

Quadro 11 – Questionário 1

O que vocês percebem de comum entre essas estratégias (caminhos) que vocês apresentaram na lousa?

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Essa folha corresponde ao primeiro questionário e tem como objetivo perceber se os alunos conseguem relacionar as diferentes estratégias elencadas por eles próprios. O debate das respostas ajudará na próxima ação de ensino.

Articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo: Inicialmente, a professora/pesquisadora poderá questionar como os próprios alunos costumam se organizar quando precisam realizar atividades em grupos. Com base nesse debate e nas respostas do primeiro questionário, é necessário articular as estratégias dos alunos com o que se quer ensinar, ou seja, a forma de resolução do MDC. Se a estratégia de tentativa e erro estiver na lousa, no caso de algum grupo ter utilizado, a professora pode articular alguns pontos dessa estratégia com o novo conteúdo da seguinte maneira (Quadro 12):

Quadro 12 – Articulação

Vamos começar analisando a turma do 6° ano A. Podemos ver se é possível separar os alunos em grupos de 2 integrantes:

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ \cline{2-2} -42 & 21 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Como 42 dividido por 2 fornece resto 0, significa que 2 é divisor de 42 e dessa maneira, não vão sobrar alunos sem grupos.

Mas será que existe só essa maneira de organizar grupos? Vamos tentar de outra forma...

Separando os grupos com 3 alunos cada:

$$\begin{array}{r|l} 42 & 3 \\ \cline{2-2} -42 & 14 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Então teremos 14 grupos de 3 alunos, sem sobrar alunos sem grupos.

Ah, então não existe só uma maneira de organizar os grupos! Mas será que tem mais? Alguém de vocês encontrou outra maneira? (Anotar as respostas na lousa. Se ninguém responder, continuar com o planejamento a seguir).

Vamos tentar separar os grupos com 4 alunos:

$$\begin{array}{r|l} 42 & 4 \\ \cline{2-2} -40 & 10 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Nesse caso, como o resto da divisão não é 0, dizemos que 4 não é divisor de 42. Assim, teremos 10 grupos de 4 alunos e sobrarão 2 alunos sem grupo.

Como não deu para organizar todos os alunos em grupos de 4 integrantes, podemos dizer que 3 é a maior quantidade de integrantes que podem ter nos grupos? Será que não tem nenhum outro número, maior que 3, que é divisor de 42? (Dar um tempo para debaterem)

Para confirmar a resposta de vocês, vamos dividir 42 por 5,6,7,8,9,10, até 42. Façam as contas e me respondam: 5 é divisor de 42? E 6? E 7? (perguntar até o 42)

Assim, temos os divisores (D) de 42:

$$D\ (42) = \{1,2,3,6,7,14,21,42\}.$$

Notem que 1 e 42 também são divisores de 42, porém não faz sentido formar grupos só com 1 integrante ou com todos os 42 alunos.

Assim, o que podemos concluir? (Incentivar que respondam e depois prosseguir) Podemos concluir que para encontrar a quantidade de integrantes dos grupos, basta encontrar os divisores da quantidade de alunos, certo?!

Agora vamos analisar a turma do 6° ano B. Os grupos dessa turma podem ser formados por quantos integrantes? Para isso, vamos analisar os divisores de 36. Quais são eles? (Anotas as respostas)

$$D\ (36) = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}.$$

Assim, podemos organizar o 6° B com grupos de 1,2,3,4,6,9,12,18 ou 36 integrantes cada. Podem ser formados grupos com 1 integrante ou com todos os 36 integrantes, mas isso não faz sentido nessa situação de Matemática.

Agora, comparando os divisores de 42 e os de 36, percebemos que 1,2,3 e 6 são comuns, isto é, os divisores comuns (DC) de 42 e 36 são

$$DC\ (42,36) = \{1,2,3,6\}.$$

Isto significa que uma maneira de organizar as duas turmas em grupos com a mesma quantidade de integrantes, é formar grupos com 1,2,3 ou 6 integrantes.

O enunciado diz que a professora quer saber a quantidade máxima de integrantes por grupos, que é 6. Ou seja, a resposta é: os grupos deverão ter no máximo 6 integrantes.

Vocês percebem que escolhemos o maior número dentre os divisores comuns!? Por isso é que chamamos esse valor de Máximo Divisor Comum de 42 e 36, cuja sigla é MDC. Esse é novo conteúdo matemático que vamos estudar.

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Após a articulação da estratégia, a professora deverá entregar aos alunos a folha (o segundo questionário), cujas questões se encontram no Quadro 13, para que respondam

individualmente. Respondido, deve-se pedir para que os alunos troquem as folhas uns com os outros, para poderem debater as respostas.

Quadro 13 – Questionário 2

1. Você acha que a resolução do seu grupo é mais fácil ou mais difícil do que a resolução da professora, que foi pelo uso da forma matemática do Máximo Divisor Comum (MDC)? Por quê? 2. Explique-me como você pode relacionar a sua estratégia de resolução com o conteúdo de Máximo Divisor Comum.

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Esta proposta foi inicialmente planejada para ser desenvolvida em sete horas/aula, sendo a primeira destinada à apresentação da pesquisadora e da pesquisa, bem como à entrega dos termos de assentimento e consentimento. As duas aulas seguintes seriam dedicadas à segunda e terceira ações, enquanto as quarta e quinta aulas estariam voltadas à discussão com os alunos sobre as estratégias utilizadas e sobre o primeiro questionário. Já as duas últimas aulas teriam como objetivo articular as estratégias dos alunos ao conteúdo, discutir sobre o segundo questionário e, por fim, realizar o fechamento.

Posto isso, apresentaremos a seguir os procedimentos de produção dos dados utilizados em nossa pesquisa.

3.5 Procedimentos de produção dos dados

Os alunos que participaram desta pesquisa foram divididos em sete grupos. De modo a preservar a identidade deles, usaremos uma letra de A a G para nos referirmos a cada grupo, usaremos a sigla composta pela letra referente ao grupo e um número relacionado a quantidade de alunos em cada grupo para nos referirmos a cada aluno, para a professora regente usaremos P-R e, por fim, para a professora-pesquisadora, usaremos a letra P. Dessa forma, o grupo A foi composto pelos alunos A1, A2, A3, A4 e A5; o grupo B por B1, B2, B3, B4 e B5; o grupo C por C1, C2, C3 e C4; o grupo D por D1, D2, D3 e D4; o grupo E por E1, E2, E3, E4 e E5; o grupo F por F1, F2 e F3; o grupo G por G1, G2, G3 e G4.

A produção de dados em sala de aula teve duração de quatro dias letivos, iniciando no dia 25/06/2024, totalizando cinco horas/aula. No decorrer da pesquisa, iremos nos referir a esses dias letivos como aulas, diferenciando-o de horas/aulas, isto porque a segunda aula, ministrada no dia 26 foi uma aula dupla, ou seja, teve duração de duas horas/aula.

Na ação de ensino *Introdução do problema*, a situação de Matemática, presente em uma folha separada, foi entregue aos alunos na primeira aula e ao final foi recolhida pela professora-

pesquisadora. Na aula seguinte, foi entregue novamente e depois recolhida. Ao final do mesmo dia, as resoluções da situação de Matemática foram digitalizadas.

A ação seguinte, de *Auxílio aos alunos durante a resolução*, ocorreu nas duas primeiras aulas e nelas também foram utilizados o diário de aula e os gravadores de áudio. Em relação às gravações, nas aulas destinadas a esta ação de ensino, devido à organização da sala em grupos, foram posicionados, de maneira estratégica, um gravador para cada grupo. Ao término de cada aula, foi realizada a transcrição das aulas, feita manualmente devido à má qualidade de som dos gravadores. Optamos por corrigir a língua portuguesa, de modo que a pronúncia, gírias e erros gramaticais não se tornassem obstáculos para a análise. Além disso, utilizamos algumas regras para converter a fala verbal em linguagem escrita: o uso das reticências nas transcrições indica uma pausa na conversa, enquanto que as reticências entre chaves se refere a um corte, isto é, uma eliminação de partes da conversa, e uma frase/texto entre parênteses indica comentário sobre a fala.

Parte da segunda aula e a aula seguinte foram destinadas à ação de *Discussão das estratégias dos alunos*, em que a folha contendo a situação de Matemática ainda estava com os alunos. A professora-pesquisadora continuou utilizando o diário de campo, além de ter sido utilizado um gravador e, à medida que os alunos foram apresentando suas estratégias, foram tiradas fotografias deles e dos registros na lousa. Pelo fato de as apresentações não ocorrerem em um mesmo dia, a pesquisadora relembrou as estratégias dos grupos que apresentaram no dia anterior, mostrando fotografias das resoluções, por meio dos recursos tecnológicos presentes em sala de aula. Após a apresentação de todos os grupos, foi entregue o primeiro questionário, que foi respondido individualmente.

Na última ação de ensino, *Articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo*, foram utilizados o diário de campo e um gravador de áudio. Após a professora-pesquisadora fazer a articulação, seu registro na lousa foi fotografado e, em seguida, os alunos responderam individualmente o segundo questionário, que devido ao curto tempo da aula, apenas 50 minutos, muitos alunos não conseguiram responder e entregaram suas respostas na aula seguinte. As respostas destes questionários foram digitalizadas e optamos por não corrigir a língua portuguesa dos registros escritos dos alunos, apresentando diretamente prints das respostas, diferentemente do que fizemos nos registros das falas que foram áudio-gravadas e, assim, necessitavam de transcrição.

3.6 Procedimentos para análise dos dados

Com os dados de nossa pesquisa em mãos, foi preciso analisá-los. Para isso, pautamos nos pressupostos da Análise de Conteúdo (AC) de Bardin (2016), que é

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) dessas mensagens (Bardin, 2016, p. 48).

Segundo Bardin (2016), a AC se organiza em torno de três fases: pré-análise; exploração do material e; tratamento dos resultados, inferência e interpretação. Falaremos sobre cada uma a seguir.

A primeira fase é de organização dos dados, no qual se realiza a leitura flutuante, que se refere ao primeiro contato com os documentos a serem analisados e é o momento que o pesquisador se deixa invadir por impressões e orientações. Após a leitura, é preciso selecionar os documentos que fornecem informações sobre o problema de pesquisa para constituir o *corpus* de análise, no qual é preciso fazer escolhas, seleções e seguir regras. Bardin (2016, p. 126-128) afirma que algumas dessas regras são:

> - Regra da exaustividade: uma vez definido o campo do *corpus* [...] é preciso ter-se em conta todos os elementos desse *corpus*. Em outras palavras, não se pode deixar de fora qualquer um dos elementos por esta ou aquela razão [...]
> - Regra da representatividade: A análise pode efetuar-se numa amostra desde que o material se preste a isso. A amostragem diz-se rigorosa se a amostra for uma parte representativa do universo inicial. Nesse caso, os resultados obtidos para a amostra serão generalizados ao todo.
> - Regra da homogeneidade: os documentos retidos devem ser homogêneos, isto é, devem obedecer a critérios precisos de escolha [...]
> - Regra de pertinência: os documentos retidos devem ser adequados enquanto fonte de informação, de modo a corresponderem ao objetivo que suscita a análise.

Também é preciso formular as hipóteses, que, de acordo com a autora, são suposições que serão submetidas à prova para serem confirmadas ou refutadas, e formular os objetivos (finalidade geral). Em seguida, passa-se à escolha dos índices e a elaboração de indicadores precisos e seguros, para depois preparar o material antes da análise propriamente dita. Para Gaspi, Maron e Magalhães Júnior (2023, p. 240), essa fase inicial é "[...] um dos momentos mais desafiadores da pesquisa, visto que em muitos estudos há um grande volume de dados".

A segunda fase, de exploração do material, "[...] consiste essencialmente em operações de codificação, decomposição ou enumeração, em função de regras previamente formuladas" (Bardin, 2016, p. 131). De acordo com a autora, os textos são recortados em unidades de

registro, que são unidades de significação que possibilitam a categorização e a contagem frequencial, e em unidades de contexto, que "[...] possibilitam compreender a significação da unidade de registro" (Gaspi; Maron; Magalhães Júnior, 2023, p. 241). As unidades de registro podem ser de diversas naturezas, como, por exemplo, palavras, frases, temas, personagens, acontecimentos e documentos e a partir desses trechos é possível realizar o primeiro processo de categorização.

O critério de categorização, de acordo com Bardin (2016), pode ser semântico (relacionado ao significado das palavras), sintático (relacionado com os diferentes papéis que um termo assume), léxico (relacionado com termos próximos) e expressivo.

De acordo com a autora, quando as unidades de registro são definidas, é preciso escolher a regra de enumeração. Entre essas regras estão a presença (ou ausência), frequência, intensidade, distribuição e direção, no entanto, a frequência é a medida mais utilizada. Em nosso estudo, utilizaremos a medida frequencial simples, em que

> [...] a aparição de um item de sentido ou de expressão, será tanto mais significativa – em relação ao que procura atingir na descrição ou na interpretação da realidade visada – quanto mais esta frequência se repetir. A regularidade quantitativa de aparição é, portanto, aquilo que se considera como significativo (Bardin, 2016, p. 109).

O pesquisador, ao olhar novamente os dados consegue criar as categorias intermediárias a partir das categorias iniciais e as unidades de registro pertencentes a elas. De modo análogo, criam-se as categorias finais, num processo de decomposição-reconstrução. "Esse processo de desmontagem dos dados e categorias [...] possibilita uma análise mais minuciosa dos materiais coletados, além de facilitar a interpretação do pesquisador" (Gaspi; Maron; Magalhães Júnior, 2023, p. 242).

As categorias, segundo Bardin (2016), devem obedecer a alguns critérios:

- Exclusão mútua: um elemento não pode estar classificado em mais de uma categoria;
- Homogeneidade: as categorias devem ser homogêneas, utilizando um único princípio de classificação;
- Pertinência: uma categoria deve estar de acordo com os objetivos da investigação e do referencial teórico e adaptada ao material de análise;
- Objetividade e fidelidade: os elementos de uma mesma categoria devem ser codificados da mesma maneira e é preciso definir claramente as variáveis e "[...] os índices que determinam a entrada de um elemento numa categoria" (Bardin, 2016, p. 150);
- Produtividade: as categorias precisam possibilitar inferências, hipóteses novas e dados exatos.

Por fim, é na última fase, denominada tratamento dos resultados, inferência e interpretação, que os dados passam a ser válidos e ganham significado. Assim,

> Operações estatísticas simples (percentagens), ou mais complexas (análise fatorial), permitem estabelecer quadros de resultados, diagramas, figuras e modelos, os quais condensam e põem em relevo as informações fornecidas pela análise. [...] O analista, tendo à sua disposição resultados significativos e fiéis, pode então propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos [...] (Bardin, 2016, p. 131)

De acordo com Bardin (2016), inferir é o ato de deduzir logicamente, no qual se admite uma proposição em virtude de sua relação com outras proposições aceitas como verdadeiras. A produção de inferências sobre os dados está relacionada à formulação de hipóteses, suposições e ao referencial teórico. Além disso, o pesquisador deve utilizar o referencial teórico para embasar suas análises e dar sentido à interpretação dos dados (Gaspi; Maron; Magalhães Júnior, 2023).

Tomando como base as ideias da Análise de Conteúdo de Bardin (2016), analisamos os dados produzidos. Na primeira fase, foi realizada a leitura flutuante, observando as respostas dos alunos de cada grupo, e foi definido o corpus de análise (registros dos alunos, transcrições dos áudios, diário de campo e respostas aos dois questionários), de modo que os critérios de seleção dos documentos foram atendidos. Após a preparação do material, passamos para a segunda fase – exploração do material – em que foi necessário codificar e separar as informações em unidades de registro, com o objetivo de propor categorias que classificaram cada frequência de grupo de unidades de registro. Neste momento, as categorias seguiram os critérios estabelecidos, estando em consonância com o tema de nosso estudo.

Dessa forma, visando obter resultados relacionados aos objetivos específicos, os dados foram organizados em eixos de organização, nos quais situamos temas que permitiram a criação de categorias com base na Análise de Conteúdo de Bardin (2016). Nesse sentido, propusemos dois eixos:

a) o primeiro eixo se refere às dificuldades dos alunos e às estratégias utilizadas, em que os temas foram as quatro etapas do processo de resolução de problemas (representação, planejamento, execução e monitoramento), de modo que definimos como categorias a *priori* os respectivos conhecimentos dessas quatro etapas, baseado em Proença (2018);

b) o segundo eixo se refere às compreensões dos alunos sobre o MDC, contendo os três temas a seguir, os quais, incluindo as categorias, foram definidos a *posteriori*, a saber: i) compreensões dos alunos sobre os pontos em comum das estratégias de resolução utilizadas

pelos alunos; ii) impressões dos alunos sobre as estratégias; iii) compreensões dos alunos da relação entre as estratégias utilizadas e o conteúdo de MDC.

Por fim, na fase de tratamento dos resultados, inferência e interpretação, os resultados analisados são apresentados em quadros e tabelas, além das resoluções por meio de figuras, fazendo, quando pertinentes, inferências de acordo com a teoria e o sentido identificado. Com isso, as interpretações dos resultados seguiram com base na visão da pesquisadora tendo em vista o quadro teórico, e as discussões foram feitas de acordo com as pesquisas no tema Resolução de Problemas.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Visando atingir os objetivos específicos de analisar as dificuldades dos alunos no processo de resolução do problema e as estratégias de resolução utilizadas, organizamos os dados obtidos no seguinte eixo: Dificuldades dos alunos no processo de resolução de problemas e suas estratégias de resolução. Assim, os dados presentes neste eixo fazem referência às dificuldades que os alunos apresentaram e às estratégias que utilizaram para resolver a situação de Matemática proposta, de modo que os conhecimentos linguísticos, semânticos, esquemáticos, estratégicos e procedimentais foram definidos como categorias. Desse modo, optamos por apresentar quatro subseções: (4.1.1) Representação, (4.1.2) Planejamento, (4.1.3) Execução e (4.1.4) Monitoramento.

A subseção 4.1.1 nos permite analisar se os alunos possuem dificuldades na etapa de representação do problema e nos conhecimentos relacionados a essa etapa, ou seja, se conseguem compreender o enunciado e mobilizam corretamente os conhecimentos linguísticos, semânticos e esquemáticos. Na subseção 4.1.2, serão analisadas as dificuldades dos alunos em relação ao planejamento de uma estratégia para resolver a situação matemática, envolvendo, assim, seus conhecimentos estratégicos, além de serem analisadas as estratégias efetivamente utilizadas. A subseção 4.1.3 nos permite analisar como os alunos executam esse planejamento, ou seja, como mobilizam seus conhecimentos procedimentais. Por fim, na subseção 4.1.4, será analisado se os alunos verificam suas respostas e se revertem seu processo de resolução.

Por outro lado, a fim de alcançar o objetivo específico de identificar as compreensões dos alunos, organizamos os dados no eixo intitulado Compreensões dos alunos sobre o MDC de números naturais. Como as respostas dos questionários indicam essas compreensões, e considerando que se tratam de três questões, optamos por separar este eixo em três subseções: (4.2.1) Compreensões dos alunos sobre os pontos em comum das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos, (4.2.2) Impressões dos alunos sobre as estratégias e (4.2.3) Compreensões dos alunos sobre a relação entre as estratégias utilizadas e o conteúdo de MDC. Em cada subseção, as categorias foram definidas a posteriori. Cada categoria classificou as respostas dos alunos de acordo com a similaridade, ou seja, com base nas unidades de registro identificadas.

Na subseção 4.2.1, será analisado se os alunos notam os pontos em comum existentes nas diferentes estratégias de resolução utilizadas pelos grupos e quais são esses pontos. Na subseção 4.2.2, será analisada qual estratégia os alunos têm maior facilidade em utilizar: a estratégia aplicada por seu grupo ou a utilizada pela pesquisadora durante a ação de Articulação

das estratégias dos alunos ao conteúdo. Por fim, na subseção 4.2.3, será analisado se os alunos compreendem a relação entre as estratégias que utilizaram e o conteúdo de MDC.

4.1 Eixo 1 - Dificuldades dos alunos no processo de resolução de problemas e as suas estratégias de resolução

O eixo 1 trata justamente das dificuldades dos alunos nos conhecimentos relacionados às quatro etapas do processo de resolução de problemas e das estratégias utilizadas por eles.

4.1.1 Representação

No Quadro 14, abaixo, elencamos, de maneira simplificada, as dificuldades dos grupos relacionadas à etapa de Representação. Em seguida, discorreremos mais detalhadamente sobre essas dificuldades.

Quadro 14 – Dificuldades na etapa de Representação

Grupos	Linguísticos	Semânticos	Esquemáticos
A	Consideraram a mesma quantidade de grupos e não de alunos	-	-
B	Consideraram a mesma quantidade de grupos e não de alunos	Consideraram que dupla não é grupo; Dúvida em relação a usar números decimais; Relacionaram ’máximo' com a divisão; Uso do termo ‘divisível por’, onde o correto era ‘divisor de’	-
C	-	Dúvida em relação a usar números decimais	-
D	-	Uso do termo ‘divisível por’, onde o correto era ‘divisor de’	-
E	-	Consideraram que dupla não é grupo; Não compreensão de ‘quantidade máxima’ como maior e único valor;	-
F	-	Entenderam turma e grupo como sinônimos; Relacionaram ’máximo' com a divisão; Uso do termo ‘divisível por’, onde o correto era ‘divisor de’	-
G	Consideraram a mesma quantidade de grupos e não de alunos	Não compreensão de ‘quantidade máxima’ como maior e único valor; Dúvida em relação a usar números decimais;	-

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Em relação aos *conhecimentos linguísticos*, todos os alunos participantes demonstraram compreender a palavra gincana. Apresentamos, a seguir, trechos que eles falaram a respeito dessa palavra: “*Eles vão fazer gincana e gincana é de times opostos [...]*” (A4), “*Por que a*

gente não tem uma gincana como o sexto A?" (C4) e "*Tem várias escolas que fazem gincana, que é muito legal [...]*" (C1). Logo, a palavra gincana não foi motivo de dificuldades entre os alunos.

No entanto, a expressão 'mesmo número de integrantes' causou certa confusão, pois os alunos entenderam que se trata de uma situação envolvendo quantidades iguais, no entanto, não compreenderam que essa expressão significa que tanto na turma do sexto ano A, quanto na turma do sexto ano B, os grupos deveriam ter a mesma quantidade de alunos. Eles entenderam, equivocadamente, que o que deveria ser igual era a quantidade de grupos. A seguinte fala do aluno A2 exemplifica essa ideia: "*É dividir cada grupo, tipo... O sexto ano A vai dividir em quantos grupos? Daí, no sexto ano B vai dividir igual*", assim como o do aluno B2, que disse que *"[...] o número 36 dividido por 5, suponhamos, dá o mesmo resultado dividido por 42*". Nesse mesmo sentido, o aluno G1 justificou que "*[...] tem que dar o mesmo tanto de resultado, se um der 18 o outro tem que dar 18, não pode sobrar*".

Desse modo, podemos inferir que três grupos apresentaram dificuldades quanto aos *conhecimentos linguísticos,* assim como na pesquisa de Luz (2023), em que alunos do 2° ano do Ensino Médio demonstraram ter impasses nesses conhecimentos, ao não perceberem que os materiais escolares tiveram seus preços pesquisados em uma única livraria por intermédio de dois orçamentos diferentes.

Sobre os *conhecimentos semânticos*, a frase '[...] precisa da ajuda de vocês para dividir os alunos em grupos', presente no enunciado da situação de Matemática, foi compreendida pelos participantes, assim como o esperado, e se refere a uma forma de organizar os alunos. Eles ainda relacionaram a palavra dividir com a operação de divisão. Acerca da expressão 'grupos', o aluno E4 disse que *"[...] grupo não é dupla*" e F1 que "*[...] sabendo que o número de integrantes do sexto A tem que ser o mesmo número de integrantes da turma B, então aqui já dá para saber que são 2 grupos, o A e o B*". Nesse sentido, houve também um debate entre os alunos B2 e B4, vejamos.

> *Oh gente, oh gente. Vamos parar para pensar um pouquinho? Se é em grupo não vai ser em dois (B4)*
> *Não tá falando grupos. Se a conta bateu e deu zero, pode ser dois. Oh, a professora está planejando fazer uma gincana com a turma do sexto A e sexto B, não fala quantos grupos. Para dividir os alunos. Não fala a divisão (B2)*
> *É em grupos [...] (B4).*

Assim, o aluno B4 tentou justificar que não estaria correto fazer a divisão de 78 (resultado da junção das turmas) por 2, como o colega havia indicado anteriormente. Além

dessa estratégia de juntar as turmas e dividir por 2 não resolver o problema, veremos sobre as estratégias logo mais, essa justificativa pode ser considerada um equívoco, já que os alunos podem ser organizados em apenas dois grupos, conforme o aluno B2 argumentou, embora não seja a única maneira.

Nesse sentido ainda, foi possível observar que em três grupos, a dúvida sobre qual conjunto de números considerar, fez parte das conversas, como fica claro nas falas do aluno B2, *"[...] não tem que colocar vírgula agora?*", do aluno C3, "*Gente, será que pode usar vírgula?*" e do aluno G2, "*É conta com vírgula,*", se referindo ao cálculo da divisão. Uma possível causa dessa dúvida é de que no momento em que a pesquisa foi realizada, os alunos já haviam trabalhado com a divisão de números decimais. Porém, analisando o contexto, deveria estar claro para todos que o conjunto envolvido é o conjunto dos números naturais, já que se trata de divisões de pessoas. Um outro aluno do grupo C compreendeu essa ideia e exclamou "*[...] vai dividir um aluno no meio?!*" (C3).

Outra expressão presente no enunciado que exige a mobilização de *conhecimentos semânticos* é 'quantidade máxima'. Quatro grupos deixaram claro suas dificuldades com a compreensão matemática dessa expressão e/ou com o termo 'máximo'. Para o grupo B, temos, como exemplo, a seguinte fala *"[...] É 39? Porque somando os dois, a divisão vai ser 39, sendo o máximo*" (B2). No grupo F, o seguinte diálogo exemplifica essa dificuldade:

> *Por que vocês somaram? (P)*
> *Bom, é... porque é quantidade máxima, aí nós vamos somar os dois números para poder dividir, para ver qual é a quantidade máxima (F1)*
> *Então vocês acham que sempre que falar quantidade máxima tem que somar? (P)*
> *Para poder dividir sim (risos) (F1).*

Esses alunos utilizaram erroneamente o termo quantidade máxima, pois o relacionaram com o resultado de uma divisão. Por outro lado, três alunos do grupo E utilizaram mais de um número sendo o valor máximo, E4 disse que "*Aí, o máximo da turma do sexto ano A, de alunos de cada grupo é 14, e no B é 12*", E1 escreveu em sua folha contendo a situação de Matemática que "A turma sexto A pode no máximo 2, 3, 6, 21 alunos em cada grupo e no sexto B, 2, 3, 6, 12" e E5 registrou que "6°A pode no máximo 2, 3, 6, 12 e 21, 6°B pode máximo 2, 3, 6 e 12".

De modo análogo, um aluno do grupo B ao encontrar dois valores possíveis para a resposta, fez o seguinte questionamento a seus colegas, "*Mas daí tem que colocar um número fixo? Ou pode 2, o 3...*" (B2), e após os alunos do grupo F determinarem três possibilidades de organizar os grupos dos sextos anos e a pesquisadora questionar qual era a quantidade máxima que eles encontraram, F2 perguntou "*Soma todos?*". Além disso, em um certo momento, o

grupo G também determinou dois valores. Esses exemplos mostram que eles não relacionaram a ideia de máximo como sendo o maior e assim, não compreenderam que a resposta do problema seria um valor único, dificuldade também encontrada em um aluno da pesquisa de Nunes (2017).

A dificuldade em compreender matematicamente os significados das palavras não é específico desses alunos, também se fez presente nos alunos do 7° ano do Ensino Fundamental da pesquisa de Travassos (2023). Na aplicação da sequência didática voltada para o conteúdo de inequações de 1° grau, esses alunos apresentaram dificuldades em mobilizar os conhecimentos semânticos referente aos termos 'não ultrapassar', 'no máximo' e 'no mínimo'.

Ainda sobre os *conhecimentos semânticos*, os alunos de nossa pesquisa, especificamente dos grupos B, D e F, apresentaram dificuldades nos termos 'divisor' e 'divisíveis'. Como exemplos temos as seguintes frases ditas: "*Nós temos que achar algum número que é divisível por 32 e quarenta e... 36*" (B2), "*É divisível por 36, não é?*" (D4) e "*O número 6 também é divisível por 78*" (F3). Estes alunos, ao invés de escreverem 'divisor de' ou 'divisores de', utilizaram erroneamente o termo 'divisível por', o que demonstra uma incompreensão de conceitos aprendidos anteriormente.

Uma possível causa desses equívocos pode ser o fato de que esses participantes tiveram contato com o conteúdo de divisibilidade (conceitos de divisor, ser divisível, múltiplo, critérios de divisibilidade) recentemente e trabalhado por pouco tempo (duas semanas anteriores a implementação da proposta de ensino) e estavam cursando a primeira metade do ano letivo.

Em relação aos *conhecimentos esquemáticos*, foi possível analisar que em três grupos, um aluno de cada um desses grupos, ou trocou a divisão pela multiplicação, ou sugeriu esta última operação, no entanto, com o decorrer da conversa eles mesmos corrigiram esse equívoco. No grupo A, um aluno solicitou que seus colegas fizessem alguns cálculos de multiplicação, em *"[...] vocês duas vão fazer 36, aí vocês fazem vezes 2 e vezes 4. E nós fazemos o 36 vezes 2 e 4 vezes 8 [...]*" (A2), no entanto, outro colega questionou se a operação não seria de divisão: "*Vezes? Não é de divisão?*" (A1), neste momento o aluno A2 afirma que "*É dividido, falei errado*", e mesmo se corrigindo, esse aluno comete o mesmo equívoco outras vezes.

No grupo B, enquanto os alunos estavam comentando sobre realizar divisões, um aluno levantou a hipótese de realizar cálculos de multiplicação, com a seguinte frase: "*E se nós temos que, tipo, multiplicar?*" (B4), mas seu colega o contrariou, dizendo que "*Não, não vai dar*" (B1). Algo similar ocorreu no grupo C, em que um dos alunos questionou seu grupo se teriam que fazer a operação de multiplicação ou de divisão, "*Mano, não tem que pegar o 39, o 39 com esse e fazer vezes, não? Ou dividir?*" (C2).

No grupo E, um aluno explicou que "*Tem que fazer ou uma divisão, ou uma multiplicação que os dois números... tipo, 36 dividido por 6 vai dar tantos, exemplo, vai dar 6. Daí tem que fazer 42 dividido, vezes alguma coisa que também vai dar 6*" (E3). É provável que os alunos que sugeriram a multiplicação tenham apenas confundido os termos por falta de atenção. Os participantes da pesquisa de Andrade, Gomes e Mafra (2020) também apresentaram essas dificuldades.

Pelo fato de que os alunos de nossa pesquisa que apresentaram essas dificuldades foram poucos e foram corrigidos por seus colegas, temos que, de modo geral, todos reconheceram que a situação de Matemática se tratava de uma situação aritmética envolvendo divisões. Desse modo, não demonstraram dificuldades nos *conhecimentos esquemáticos*. Como exemplo, temos os seguintes comentários: "*A gente sabe que é divisão*" (A1) e "*[...] o problema matemático está dizendo que é para dividir os alunos em grupos*" (C1). Por outro lado, no estudo de Rozario (2022), três (dos cinco) grupos de alunos de 6° ano explicitaram ter dificuldades nos conhecimentos esquemáticos, já que não entenderam que a situação envolvia área de triângulo.

A partir da análise dos conhecimentos mobilizados na etapa de Representação, podemos inferir que os participantes apresentaram desconhecimento dos conceitos e termos envolvidos, e dificuldades na tradução da língua materna para a linguagem matemática, causando equívocos na compreensão da situação de Matemática, o que dificulta a resolução e impacta negativamente o processo de Ensino e Aprendizagem. Resultado análogo é encontrado em Stefani (2019), em que os participantes são alunos de 7°, 8° e 9° ano e cujo conteúdo matemático abordado é área e perímetro.

4.1.2 Planejamento

Nesta subseção, foram analisadas as estratégias de resolução utilizadas por cada um dos sete grupos e as dificuldades em planejá-las.

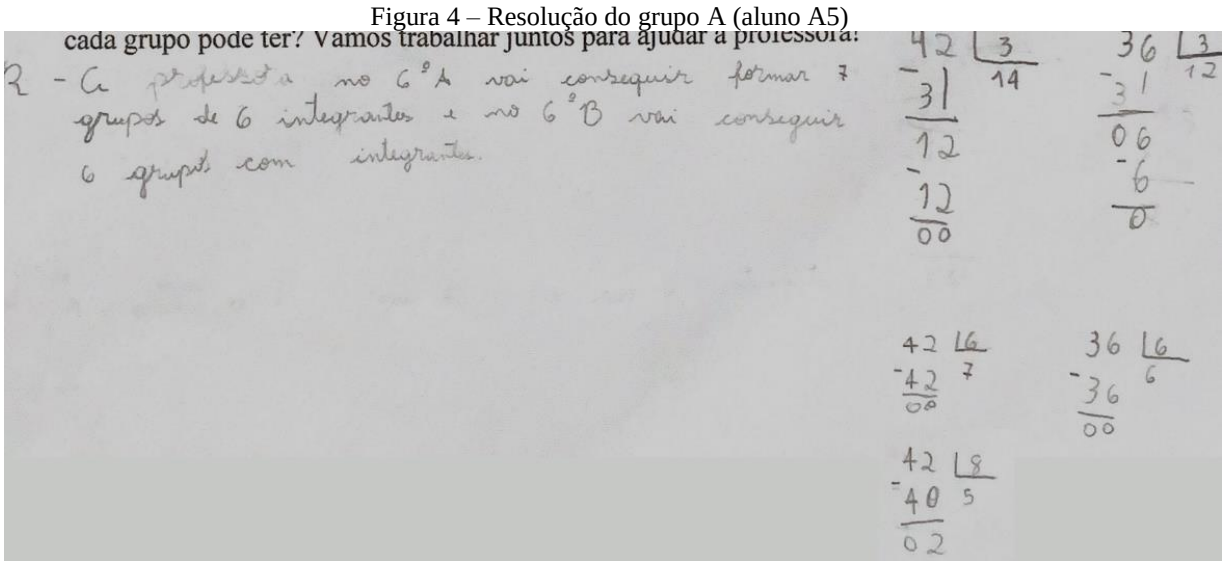
Grupo A: A estratégia inicial desse grupo foi juntar as duas turmas do sexto ano, obtendo 78, e dividir esse valor por números pares. Esta estratégia não é adequada, uma vez que não levam os alunos a resolverem o problema, pois não satisfaz os requisitos do enunciado. Após ouvir a pesquisadora comentar com outro grupo que a soma não era necessária, eles optaram por fazer diversas divisões, com o dividendo sendo os números 42 e 36 e divisores pares. Com o decorrer do diálogo entre eles, perceberam que os divisores não precisariam ser somente números pares, que é exemplificado quando A4 pergunta "*Gente, mas os números*

podem ser ímpares também, né?" e tem como resposta "*É, pode ser ímpar, não tem problema*" (A2), outro aluno também concorda ao afirmar que "*Não precisa ser valores pares*" (A5).

A pesquisadora fez intervenções a fim de levar os alunos a uma estratégia adequada, já que eles apresentaram dificuldades nos *conhecimentos estratégicos*. Algumas das perguntas realizadas foram: "*Oh, vamos pensar aqui, vamos pensar só no sexto ano A. Tem quantos?*", "*Dá para formar duplas?*", "*Dá para formar trios?*", "*[...] Dá para formar grupos de 4?*", "*Tenta ver por 5, por 6...*" e "*Pensa assim e depois pensa no sexto ano B, um de cada* vez", atuando então como *direcionadora*. Desse modo, os alunos realizaram mais alguns cálculos de divisão, e explicaram que *"[...] Tá, no grupo do sexto A, dá divisível por 3, por 3 vai dar 14 e vai formar 3 grupos de 14 pessoas*" (A4), esta fala foi complementada pelo colega, que disse "*Ou 14 grupos de 3 pessoas [...]*", e utilizaram a mesma ideia com o sexto B, "*[...] o 36 vai dividir por 3 também, por causa que vai dar 12 grupos se dividido por 3*" (A4).

A pesquisadora concordou que nos dois sextos anos, poderiam ser formados grupos com 3 pessoas e fez outros questionamentos a fim de que eles conseguissem compreender que os referidos números são divisíveis por outros valores além do 3, como: "*Mas será que dá para formar grupos com 4?* ", "*E com 5?* ", "*E com 6?* ", "*Dá pra formar grupos de 7?* ". Assim, realizaram os cálculos, até mesmo com outros números, como o 8, 10, 11 e 12, e compreenderam que também era possível formar grupos com 6 integrantes e concluíram que a resposta era 6. A fim de que os alunos escrevessem uma resposta respondendo de fato ao enunciado, a pesquisadora questionou "*O que é 6? Escreve certinho*". A Figura 4 mostra a resolução do A5, representando seu grupo.

Figura 4 – Resolução do grupo A (aluno A5)



Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Resumidamente, consideramos que a estratégia que o grupo utilizou ao final, com o auxílio da pesquisadora, foi de tentativa e erro, assim como a planejada no Quadro 8, pois os alunos testaram alguns cálculos de divisão para saber quais números dividiam o 42 e 36, ao mesmo tempo, para, em seguida, obter o maior deles.

Grupo B: A primeira tentativa de resolver a situação de Matemática desse grupo foi calcular a média aritmética, ou seja, os alunos somaram 42 e 36 e dividiram o resultado por 2. Ao serem questionados pela pesquisadora, não souberam se justificar. Vejamos a seguir uma parte da conversa dos alunos com a pesquisadora.

> *Não, não, calma. Você falou para mim que juntou os dois, os dois o que? (P)*
> *O sexto A e o sexto B (B2)*
> *Mas por que você juntou? (P)*
> *Porque a professora vai fazer uma gincana com o sexto B e sexto A. Daí tem que juntar tudo para poder dividir para fazer a gincana (B1)*

Essa ideia de ter que juntar os alunos das duas turmas não é correta, pois de acordo com o enunciado, cada turma seria dividida em grupos, no entanto, a quantidade de integrantes nesses grupos deveria ser igual tanto no sexto ano A, quanto no B, e deveria ser a maior possível. Assim, trata-se de uma estratégia inadequada, que foi elaborada possivelmente devido às dificuldades que esse grupo teve nos *conhecimentos linguísticos* e *semânticos*, não compreendendo o problema (etapa de Representação).

Com a pergunta, "*Mas está escrito que vão fazer juntos? [...]*" (P), a pesquisadora, atuando como *incentivadora*, levou os alunos a refletir e assim eles começaram a pensar em outra maneira de resolver a situação, que também não foi adequada. Essa nova estratégia, que nomeamos de determinação do quociente, consistia em "*[...] achar o número que dividido por 36 e 42 dá o mesmo resultado"* (B2), ou seja, os alunos realizaram algumas divisões, como 36÷4, 36÷5, 36÷6, 36÷8, 36÷2, 36÷3, 42÷7, 42÷2, 42÷4, etc., visando encontrar o mesmo quociente. Embora a realização dessas divisões ajude a resolver o problema, nessa estratégia os alunos estavam preocupados em determinar a mesma quantidade de grupos formados e não a mesma quantidade de integrantes, como exposto no enunciado. Mesmo assim, concluíram que cada grupo teria 6 integrantes.

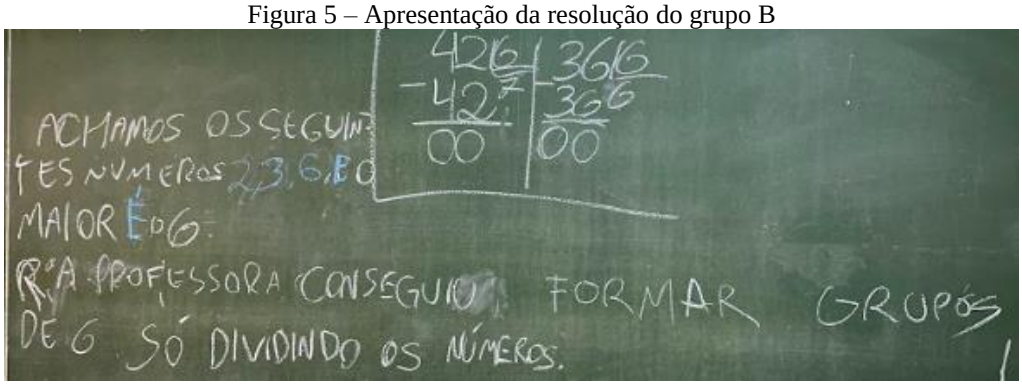
Mesmo com a resposta correta, a professora atuou como *direcionadora* ao sugerir que os alunos fizessem novos cálculos, a fim de perceber que havia outras maneiras de organizar os grupos. Alguns dos questionamentos feitos foram, "*Mas será que eles não podem ficar de outro jeito também? Por exemplo, se for formar duplas, será que dá?* " (P) e "*[...] Será que os grupos podem ser maiores?* " (P). No entanto, eles se confundiram e chegaram a duas repostas finais,

a saber: 12 grupos no sexto ano A e 15 grupos no sexto ano B. Mais uma vez, os alunos não chegaram a uma resposta condizente com o enunciado do problema, o que demonstra dificuldades nos *conhecimentos estratégicos*.

Para corrigir esse equívoco, a pesquisadora interferiu novamente, perguntando se não era preciso ter o mesmo número de integrantes nos grupos dos dois sextos anos e pediu que relessem o enunciado. Ainda com dificuldades em compreender, a pesquisadora, cumprindo seu papel de *direcionadora*, os levou a pensarem em diversas maneiras que os grupos poderiam ser formados em cada uma das turmas de sexto ano, direcionando-os para a estratégia que nomeamos de lista de divisores, como exemplo temos as seguintes falas: "*[...] Dá para fazer duplas no sexto ano A, porque se eu fizer a divisão por 2, vai dar resto zero. Dá para fazer trios, no sexto ano A?* " (P) e "*Mas será que dá por 12?* " (P). Após essa intervenção, eles foram dividindo o 42 e o 36 por alguns números, chegaram que as turmas poderiam ser divididas em grupos de 2, 3 e 6 integrantes e, por fim, conseguiram indicar a maior quantidade de integrantes em cada grupo.

Apenas com a folha contendo o enunciado da situação de Matemática, não é possível analisar a estratégia final utilizada, pois praticamente a utilizaram como folha de rascunho para fazer os cálculos, por isso ao invés de ilustrar a estratégia com a resolução de algum desses alunos, optamos pela resolução do grupo B apresentada a todos durante a 4ª ação do EAMvRP, presente na Figura 5.

Figura 5 – Apresentação da resolução do grupo B



Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Em resumo, embora a pesquisadora tenha direcionado os alunos à estratégia de lista de divisores, que consistia em encontrar como os grupos do sexto ano A poderiam ser formados, como os grupos do sexto ano B poderiam ser formados, para depois observar a formação em comum e a maior quantidade possível de integrantes, consideramos que a estratégia final utilizada pelo grupo B foi de tentativa e erro, uma vez que, ao invés de fazer todos os cálculos

usando o 42 como dividendo e só depois com o dividendo sendo 36, eles tomaram um número e verificaram se a divisão de 42 e 36 dava exata, isto é, se aquele número era um divisor de 42 e de 36.

Grupo C: Esse grupo usou a maior parte do tempo da aula com conversa paralela e inicialmente não se mostrou disposto a resolver a situação proposta, isso pode ser observado na fala: "*Gente, vamos fazer do jeito mais fácil, mais preguiçoso que tem*" (C2). Depois de muito custo, os alunos desse grupo chegaram à 39 como resposta, utilizando a mesma estratégia inicial inadequada do grupo anteriormente citado. A fim de levá-los a perceber o erro em considerar as duas turmas juntas, a pesquisadora questionou, "*Mas por que vocês estão juntando? Tá falando que tem que juntar?* " e "*Então, mas o sexto A precisa dividir, o sexto B tem que dividir. Mas não precisa somar os dois*".

Isso fez com que os alunos mudassem de estratégia, embora também incoerente, pois fizeram cálculos diretamente envolvendo os números do enunciado, como o aluno C1 explica em "*Então, mas... Então vai ter que dividir o 42 pelo 36, ou 36 pelo 42, que vai dar o mesmo resultado*". Os alunos desse grupo utilizaram a estratégia que Hegarty, Mayer e Monk (1995) chamam de tradução direta, pois não levaram em consideração o contexto do problema, utilizaram apenas os dados numéricos presentes no enunciado e realizaram uma operação matemática, sem refletir. Eles fizeram isso, possivelmente porque não estavam motivados a resolver o problema e não o compreenderam, devido a suas dificuldades nos *conhecimentos linguísticos* e *semânticos*. De modo análogo, a pesquisa de Martinez e Valverde (2022) analisou que os alunos de Ensino Médio tiveram predisposição para executar uma operação imediata, sem refletir de forma notável sobre o problema, e um possível motivo, de acordo com os autores, é que desde o início da vida escolar, os problemas são utilizados para aplicação de uma única operação. Isso também pode ter sido um dos motivos de nossos participantes utilizarem a estratégia inadequada descrita anteriormente.

A pesquisadora precisou então, intervir para os orientar a seguir uma estratégia adequada. Assim, em seu papel de *direcionadora*, ela pediu que eles pensassem primeiramente em uma das turmas dos sextos anos e como esta turma poderia ser dividida: "*[...] primeiro, vocês pensam só no sexto ano A, foca no sexto A. [...] Como que podem ser formados os grupos dessa sala? [...] Tá, então pode formar duplas? [...] Dá para formar grupos com 4? [...] Então, ou é de 2 ou 4, só?* ". A princípio deu impressão de que eles tinham compreendido o que deveriam fazer para conseguir solucionar, porém, pouco tempo depois eles estavam se questionando se era preciso "*[...] fazer aquele risco no meio [...]*" (C2) referindo-se à

decomposição em fatores primos, conteúdo esse que a professora regente havia abordado nas semanas anteriores à implementação.

Embora essa estratégia seja coerente, e está presente no Quadro 8 como possível estratégia de resolução, era preciso um pouco mais do que simplesmente realizar o procedimento de decomposição, ou seja, era necessário compreender que os fatores primos que dividem 42 e 36 ao mesmo tempo são o 2 e o 3, assim, o produto da multiplicação desses números é exatamente o MDC de 42 e 36. Para utilizar essa estratégia, os alunos teriam primeiramente que compreender o que é o MDC, mas nossa intenção foi justamente trabalhar a introdução desse conteúdo, por isso optamos por não explicar essa estratégia aos alunos. Mesmo que de maneira inadequada, dois alunos desse grupo registraram a decomposição em fatores primos em suas folhas contendo a situação de Matemática.

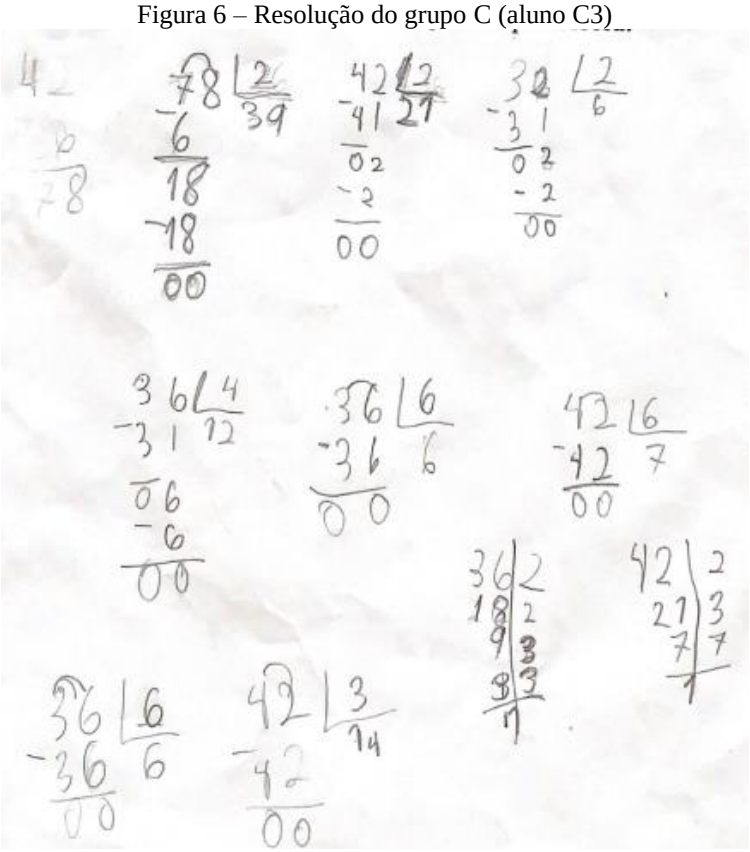
A pesquisadora persistiu em direcioná-los à estratégia planejada, por isso os questionou novamente se era possível formar trios, grupos com 4, com 5 e com 6 integrantes nas duas turmas de sexto ano. A fim de incentivar os alunos, a professora regente comentou "*Elas sabem, a gente já estudou os critérios de divisibilidade, até fez prova disso*" (P-R), fornecendo dica de outra estratégia que também resolveria o problema. Neste momento, a pesquisadora perguntou quais eram os divisores de 42 e de 36 e se esses dois números eram divisíveis por 2, 3, 4, 5 e 6. Ela optou por não questionar os alunos sobre os outros divisores, pois como tiveram muitas dificuldades nos *conhecimentos estratégicos*, considerou que o ideal naquele momento era entender esta última estratégia, mesmo que não tenham verificado todos os divisores.

Deste modo, consideramos como central para que o grupo obtivesse a resposta, o ato da pesquisadora retomar o que os alunos haviam determinado e perguntar qual era a quantidade máxima, como mostra o seguinte diálogo:

> *[...] Então eu consegui dividir por 2, por 3, se não me engano vocês falaram que dava por 4… (P)*
> *Dá por 6 (C1)*
> *E por 6. Então qual é a quantidade máxima? (P)*
> *6 (C4)*

Assim, eles conseguiram chegar à resposta correta. Embora tenham concluído o problema, eles tiveram muitas dificuldades, tanto em relação aos *conhecimentos linguísticos* e *semânticos*, quanto aos *conhecimentos estratégicos*. A Figura 6 mostra a resolução do C3, exemplificando as estratégias utilizadas pelo grupo C.

Figura 6 – Resolução do grupo C (aluno C3)



Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Consideramos então que o grupo C utilizou a estratégia de tentativa e erro para chegar à solução final, já que determinou os divisores de 42 e de 36 ao mesmo tempo por meio das tentativas de divisão.

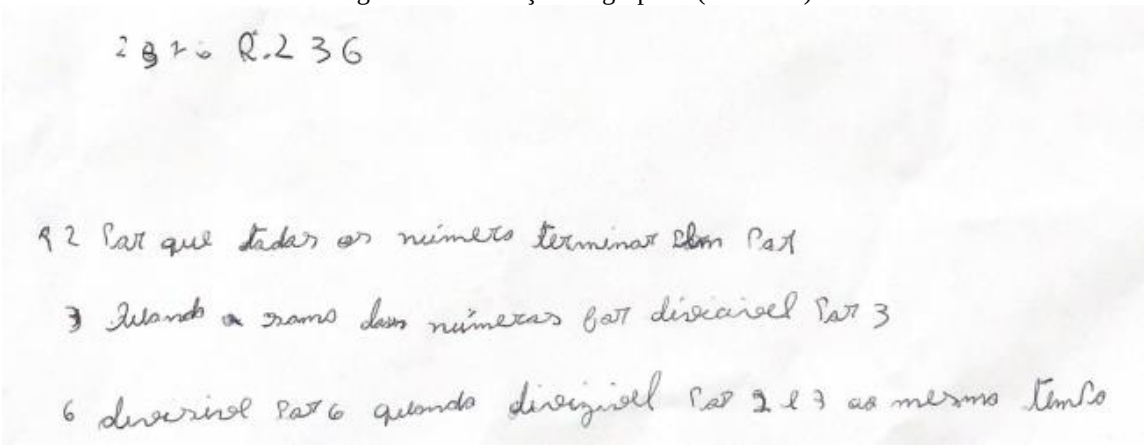
Grupo D: Neste grupo, embora a estratégia inicial não tenha sido a de média aritmética, como nos outros grupos, ela foi cogitada por D3, porém seu colega D2 não concordou e sugeriu outra maneira de resolver. Vejamos como se deu essa conversa:

> *Já sei, é só fazer esse mais esse e depois dividir por 2 (D3)*
> *Não (D2)*
> *Eu não entendi (D4)*
> *É fácil. Tem que ver lá atrás. É o seguinte, vai ter que usar a divisibilidade, por causa que a divisibilidade é o que a gente tá aprendendo agora (D2)*
> *Fala mais alto. Vai. Tem que usar o que? (D4)*
> *Tem que usar divisibilidade (D2)*

O D2 utilizou seus conhecimentos prévios sobre os critérios de divisibilidade para tentar resolver a situação de Matemática, o que é uma conduta a ser feita quando se resolve um problema colocado como ponto de partida no viés do EAMvRP (Proença, 2018). Essa estratégia então foi aceita pelo grupo, ficando a cargo de D2 e D3 relembrarem os critérios, já que o D4 não se mostrou interessado em resolver e D1 não se recordava das aulas anteriores.

Por terem planejado uma estratégia coerente, estratégia esta que a pesquisadora não havia considerado em seu planejamento, a pesquisadora pouco interferiu neste grupo, no entanto, estava sempre formulando questionamentos sobre o que os alunos estavam fazendo e recebeu respostas satisfatórias. Desse modo, consideramos que este grupo não apresentou dificuldades nos *conhecimentos estratégicos*, já que elaboraram facilmente uma estratégia que os levou a resolvem o problema. A Figura 7 retrata o registro de D3, representando a estratégia de seu grupo.

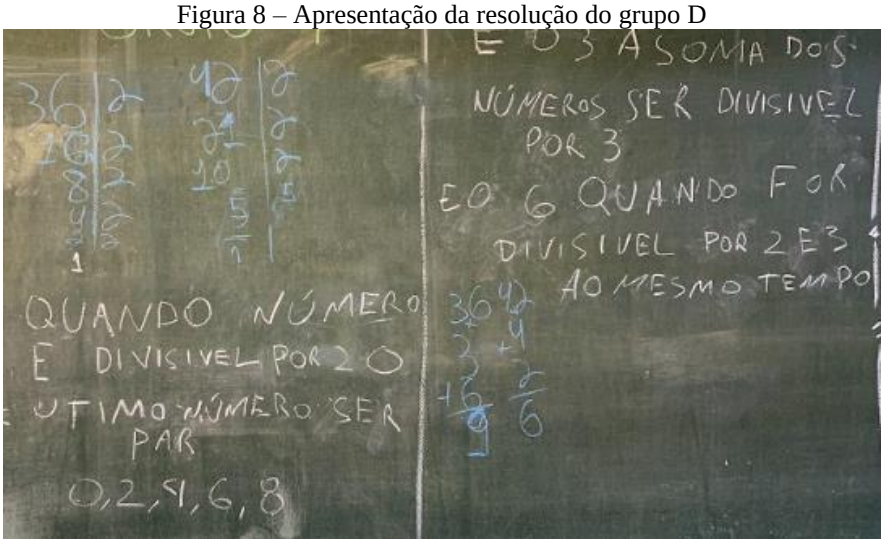
Figura 7 – Resolução do grupo D (aluno D3)



Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Durante a apresentação da estratégia, na 4ª ação de ensino, além de explicar os critérios de divisibilidade utilizados, os alunos desse grupo realizaram a decomposição dos números em fatores primos, conforme podemos observar na Figura 8.

Figura 8 – Apresentação da resolução do grupo D



Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Embora tenham realizado a decomposição em fatores primos, com alguns equívocos, os alunos não relacionaram esse procedimento com o restante da estratégia, o que nos leva a inferir que eles queriam apenas utilizá-lo, mesmo sem compreender sua importância naquele contexto. Isso não é exclusivo dos alunos desse grupo, vimos anteriormente que o grupo C também fez a decomposição, mas ambos não a utilizaram de maneira coerente. O mesmo aconteceu no estudo de Sousa (2019), em que alguns alunos do 3° ano do Ensino Médio realizaram a decomposição de dois números em fatores primos, porém não conseguiram associá-lo ao cálculo do MDC.

Grupo E: A primeira estratégia utilizada por esse grupo, foi a mesma dos grupos B e C, isto é, calcularam a média aritmética. Foi um processo árduo mobilizar esse grupo no sentido de que houvesse uma mudança de estratégia, já que a primeira era equivocada. O trecho a seguir mostra os alunos tentando justificar a estratégia utilizada.

> *Mas por que você precisa primeiro juntar? (P)*
> *Para saber o valor (E4)*
> *Para poder dividir em grupo (E1)*
> *[...]*
> *Ela não falou que quer juntar (P)*
> *Claro que falou (E4)*
> *Onde? Se vocês me mostrarem, eu paro de perguntar (P)*

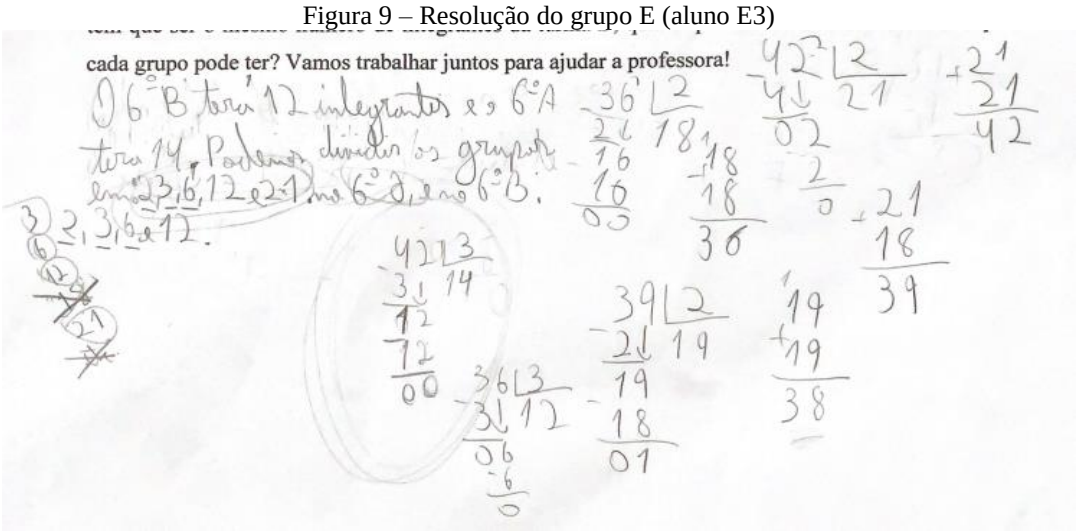
Para realizar uma divisão é preciso saber por qual número pretende dividir e por qual valor, no entanto, nesta situação de Matemática o dividendo não é a quantidade total de alunos e sim de cada turma. A elaboração desta estratégia foi influenciada possivelmente pela má compreensão do problema (etapa de Representação), em especial devido às dificuldades nos *conhecimentos semânticos*, como comentamos na subseção 4.1.1. Deste modo, percebemos a dificuldade dos alunos em elaborar uma estratégia que leve a solução, que é característica dos *conhecimentos estratégicos*.

Com essa intervenção da pesquisadora, um aluno compreendeu que não era preciso juntar as duas turmas, e explicou a seus colegas: "*Você tem que dividir o número de alunos de cada turma e não juntar os dois para fazer um negócio só*" (E3). Assim, eles optaram por seguir a estratégia de determinação do quociente, que também foi usada pelo grupo B. Sobre isto, um aluno explicou que *"[....] então a gente vai ter que dividir por 3, por 4, por 6, até chegar no resultado certo*" (E4). Embora a ideia de realizar essas divisões seja coerente, afinal era preciso realizá-las para determinar como as turmas poderiam ser organizadas, esta fala ressalta a importância que esse grupo deu em determinar o quociente, não considerando a mesma quantidade de integrantes e sim de grupos. Essa estratégia levou os alunos a obterem como

resposta dois valores, assim como o grupo B fez erroneamente. Esses valores foram os quocientes de 42÷3 e 36÷3.

Atuando como *direcionadora*, a pesquisadora levantou alguns questionamentos, como: "*Ai dá por quantos no sexto ano A?* ", "*Por 3 dá certo?* ", "*Então forma trios, é isso?* ", "*E eu posso formar duplas?* ", "*Posso formar grupos de 5?* ", "*Grupos de 6?* ", "*De 12?* ", "*De 21?*", "*Então você tem que tentar com outro número, não só com o 3. Tem que ver outros jeitos de fazer grupos [...]*". Assim, os alunos modificaram novamente sua estratégia, realizaram diversos cálculos de divisão, para listar para cada turma as quantidades possíveis de integrantes em cada grupo. Em seguida, a pesquisadora perguntou *"[...] qual é maior que tem em comum, nos dois sextos?* ", levando-os a compararem os valores obtidos e determinarem a maior quantidade comum, concluindo a resolução. Embora haja equívoco na escrita e não conste a resposta final correta, utilizamos a resolução de E3 (Figura 9) para representar todo o grupo, já que é possível observar as diversas estratégias utilizadas, mesmo que não tenham sido adequadas.

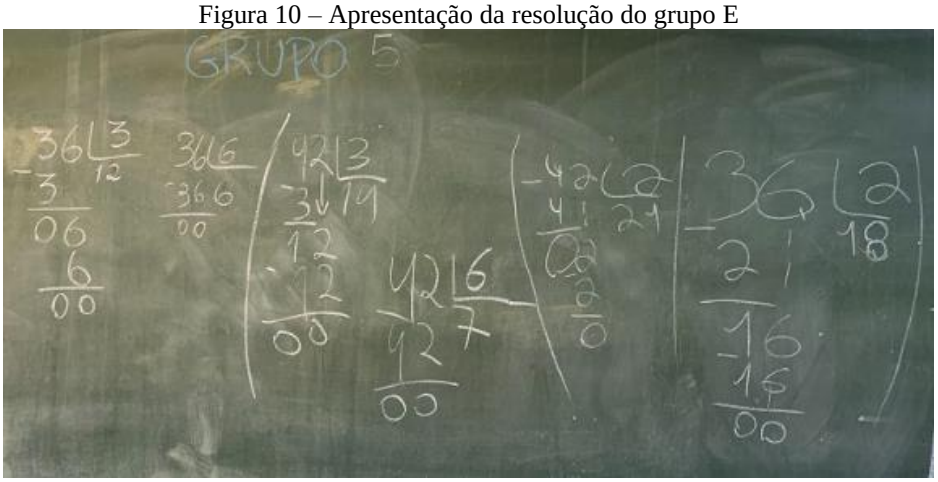
Figura 9 – Resolução do grupo E (aluno E3)



Fonte: Dados da pesquisa (2024)

De modo a ter uma visão mais clara da estratégia final utilizada por esse grupo, temos a Figura 10, que mostra o que foi apresentado durante a 4º ação do EAMvRP. Embora conste apenas os cálculos, o restante da estratégia foi explicado de maneira oral.

Figura 10 – Apresentação da resolução do grupo E



Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Em geral, consideramos que este grupo utilizou como estratégia final a estratégia de lista de divisores, que, como já explicamos, trata-se de indicar as maneiras que os grupos poderiam ser formados em cada uma das turmas de sexto ano, isto porque eles fizeram primeiramente os cálculos usando 42 como dividendo e depois com o dividendo sendo 36.

Grupo F: A estratégia inicial deste grupo foi análoga a dos demais grupos, com exceção da do grupo D. No entanto, um aluno deste grupo estava receoso em aceitar essa estratégia, como fica claro em sua fala, que diz: "*Sim, mas não tenho certeza que é assim*" (F2). Mas, em um momento posterior, ele argumenta, "*Mas… Não vai ser um grupo de cada sala, vai ser as duas salas juntas para formar grupos, porque se for um grupo de cada sala, vai ficar, vai ficar…*" (F2), o que mostra que ele, assim, como seus colegas, não compreendeu o problema, principalmente seus aspectos *semânticos*, o que colaborou para a elaboração de uma estratégia inadequada. Desse modo, consideramos que este grupo teve dificuldades nos *conhecimentos estratégicos*.

Ainda desconfiados desta estratégia, um aluno sugeriu modificá-la: ainda considerava a quantidade total de alunos (sexto A e sexto B), mas também considerava outras possibilidades de dividir os grupos. Essa nova estratégia é explicada por F3 em "*É, nós sabemos que tipo, dá o 78. Para dividir dá para saber que pode ser o 2 ou o 3, que dá para dividir bem. Pode ser grupos de 3, 2, entendeu!?*". Esse caminho além de continuar sendo inadequado, uma vez que não leva à solução, pois não satisfaz as condições do enunciado do problema, não foi considerado pelos demais alunos do grupo. Um desses alunos sugeriu o que Posamentier e Krulik (2009) compreendem como estratégia de adotar um ponto de vista diferente, o que fica claro na seguinte fala: "*Então, pode ser um entendimento diferente, nós podemos tentar entender de outro jeito*" (F1).

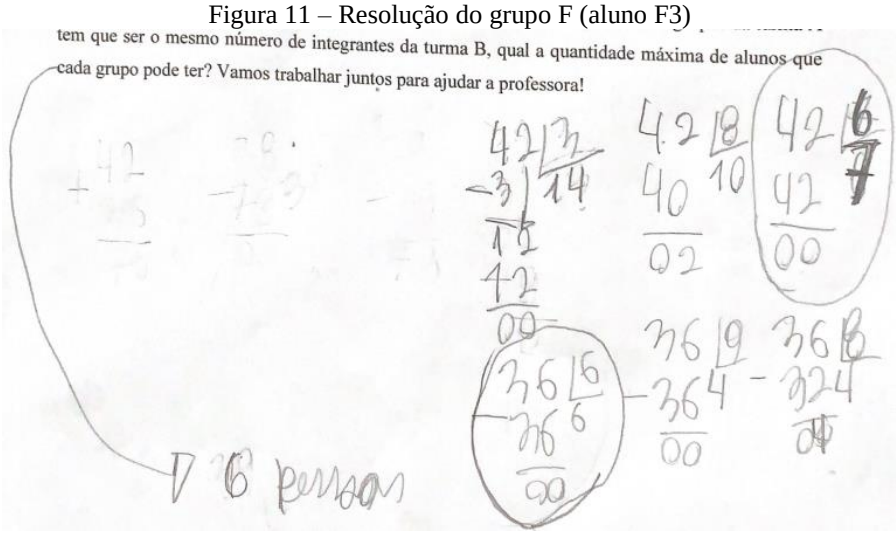
Quando o grupo apresentou para a pesquisadora a maneira que resolveram o problema, esta questionou "*Por que vocês somaram?* " (P) e atuando como *direcionadora* e *incentivadora* expressou algumas sugestões que redirecionaram os alunos, a saber: "*Vamos ver só no sexto ano A. Qual a quantidade máxima de alunos no grupo só no sexto ano A?* " (P) e "*Mas tem que tomar cuidado que eu não quero saber a quantidade igual de grupos, por exemplo, se no sexto ano A tiver 10 grupos e o sexto B tiver 7, isso não tem problema, o que tem que ser igual é a quantidade de participantes*" (P).

Essa última fala fez com que o aluno F1 tivesse a ideia de organizar as duas turmas em grupos de 3 integrantes, como ele explica em: "*Cada grupo, oh, se dividir 36 por 3 vai dar 12, se dividir 42 por 3 vai dar 14, ou seja, os dois vai ter 3 pessoas em cada grupo, ou seja, talvez seja isso*". Assim, eles seguiram esse caminho e perceberam que também era possível organizar as turmas em grupos de 2 integrantes, mas grupos de 4 integrantes não era possível, como explica em "*Oh, o 36 dá, mas o 42 ele não dá, entendeu? 42 ele não vai ser divisível [...]*" (F3). A fim de fazer os alunos explorarem as outras possibilidades, a pesquisadora perguntou se era possível dividir os alunos em grupos de 5 e 6 integrantes, eles verificaram corretamente que não era possível formar grupos de 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 em ambas as turma de sexto ano, e afirmaram que "*Tá, mas tem que dar nos dois sexto, ou seja, os que dá nos dois juntos é 3, 2, 6 e só, porque o 42 dá por outros números, mas o 36 não dá, ou seja, o que dá para os dois é dividido por 3, dividido por 2 e dividido por 6*" (F1). Para chegar à resposta final, a pesquisadora precisou questioná-los, vejamos como ocorreu esse momento:

> *Então o que vocês falaram que pode formar? Grupos com 6, grupos com 3 ou grupos com 2. Então qual é a quantidade máxima? (P)*
> *Soma todos? (F2)*
> *Soma não. Ou forma dupla, ou forma trio… (P)*
> *Ou forma sexteto (F2)*
> *Ou forma com 6. É isso [...] (P)*
> *Sexteto (F2)*
> *Então qual é a quantidade máxima de pessoas que pode ter no grupo? (P)*
> *6 (F2)*
> *Isso (P)*

Ou seja, para finalizar a resolução, a pesquisadora indagou sobre qual era a quantidade máxima de pessoas que os grupos poderiam ter e os alunos se mostraram inseguros para responder, devido à dificuldade em compreender o significado da expressão 'quantidade máxima' (*conhecimentos semânticos*). No entanto, com o auxílio da pesquisadora, eles chegaram à resposta final. A Figura 11 se refere a resolução entregue por F3 e a fim de ilustração, representa a estratégia desse grupo.

Figura 11 – Resolução do grupo F (aluno F3)



Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Em resumo, consideramos que este grupo, ao final da resolução fez uso da estratégia de tentativa e erro, isso porque para chegar à solução da situação proposta, dividiu o 42 e o 36 por alguns números, a fim de obter os mesmos divisores.

Grupo G: De início houve um debate sobre qual estratégia seguir, por um lado alguns alunos estavam dispostos a seguir a estratégia do quociente, pois defendiam que deveriam fazer *"[...] 42 dividido por alguma coisa e 36 dividido por alguma coisa*" (G2). Por outro lado, os outros acreditavam que deveriam juntar as turmas e encontrar os divisores da soma, conforme a frase: "*Oh, 42 e 36, vai ficar duas turmas, juntando dá 78. Aí 78 dá para dividir por quais números? Por quais números dá para dividir o 78? Por 2, por 3 e por 6*" (G4).

Após a pesquisadora atuar como *direcionadora* e *incentivadora* e questionar se o enunciado da situação de Matemática deixa claro a junção das turmas, em "*Oh, vamos ver o que está escrito aqui. Sabendo que o número de integrantes do grupo da turma A tem que ser o mesmo número de integrantes da turma B. Mas está falando que vai juntar as turmas?* " (P), eles equivocadamente determinaram duas respostas diferentes, um para cada turma, o que também fizeram os grupos B e E. De modo a corrigi-los, a pesquisadora levantou a seguinte questão, "*Mas aqui não fala que tem que ser o mesmo número? Tanto na turma do A, quanto na turma do B*" (P). Percebendo a dificuldade dos alunos em seus *conhecimentos estratégicos*, a pesquisadora novamente interviu, e fez o seguinte discurso:

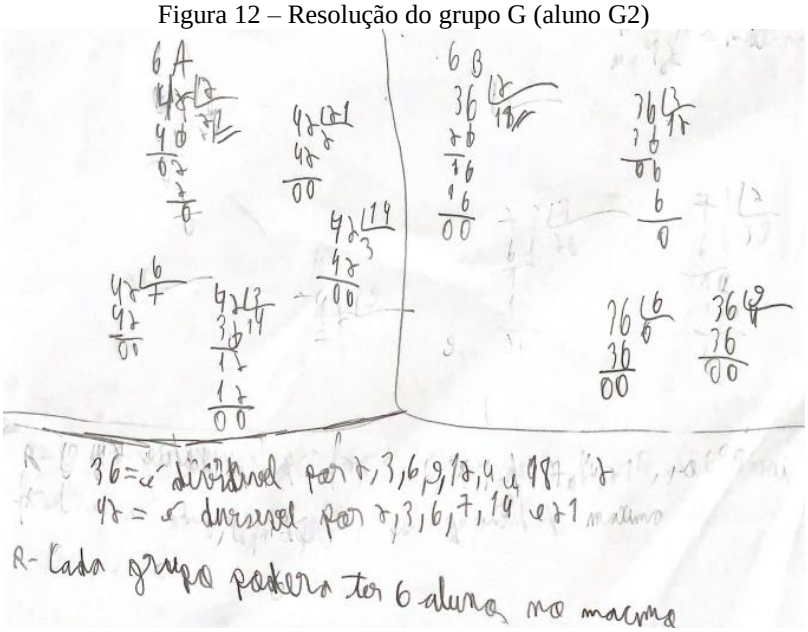
> *Se você dividir os grupos com 2 pessoas em cada grupo, 36 que é do sexto ano A, né? Opa não, sexto ano B, é sexto ano B. Se você dividir em grupos de 2, vai dar certo, porque vai ter resto zero, 18 grupos de 2 pessoas, certo? Só que só dá para dividir por 2? Só dá para formar duplas? Só? Aqui você formou duplas também. Que mais? Será que pode formar trios? Pensa nisso (P).*

Com essa dica, um aluno do grupo conseguiu elaborar uma estratégia adequada: "*Deixa eu ver... Tenta descobrir quais números podem ser divisores de 36 e de 42, tenta descobrir*" (G4). Dessa forma, os alunos aceitaram e seguiram essa estratégia. A pesquisadora incentivou-os a encontrarem todas as possíveis formas de organizar os grupos, questionando "*Eles só são divisíveis por esses números, ou vocês pararam de tentar?* " (P). Assim, com o debate entre os colegas, o grupo chegou a uma resposta final condizente:

> *Tá, então vamos lá. No sexto ano A, dá para formar… grupos de quantas pessoas?(P)*
> *De 2, de 3, de 6, de 7, de 14 e de 21 (G4)*
> *E no sexto B? (P)*
> *Dá para formar de 2, de 3, de 9, de 6, de 12 e de 4 e de 18 (G4)*
> *[...]*
> *Só tem em comum que eles podem formar grupos de 6 pessoas, de 3 pessoas e de 2 pessoas (G4)*
> *Isso. Qual que é a pergunta? (P)*
> *Qual é a quantidade máxima de alunos que cada grupo pode ter? (G4)*
> *Que é? (P)*
> *6 (G4)*

Ao responder como os grupos poderiam ser organizados em cada turma, eles listaram os divisores de 42, para a turma do sexto ano A, e de 36, para o sexto ano B. Em seguida, identificaram os divisores comuns e posteriormente, o maior deles, sem dificuldades, assim como aconteceu no estudo de Amaral (2019). A resolução final do grupo G é representada pela resolução entregue por G2 na Figura 12.

Figura 12 – Resolução do grupo G (aluno G2)



Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Consideramos que esta estratégia é a estratégia de lista de divisores, utilizada também pelo grupo E. No entanto, somente o grupo G deixou explícito que compreendeu o termo ‘divisíveis’ (*conhecimentos semânticos*) e que para encontrar a quantidade de integrantes dos grupos, bastava encontrar os divisores da quantidade de alunos.

O Quadro 15 abaixo resume as estratégias que os grupos elaboraram no início da ação de *Introdução do problema*, sem a intervenção da pesquisadora e as estratégias que os levaram à solução da situação de Matemática proposta.

Quadro 15 – Estratégias iniciais e finais

Grupos	Estratégia Inicial	Estratégia Final
A	Junção das turmas, seguida da divisão por números pares	Tentativa e erro
B	Média aritmética	Tentativa e erro
C	Média aritmética	Tentativa e erro
D	Critérios de divisibilidade	Critérios de divisibilidade
E	Média aritmética	Lista de divisores
F	Média aritmética	Tentativa e erro
G	Divisores da soma e Determinação do quociente	Lista de divisores

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Em resumo, com exceção do grupo D, os demais grupos apresentaram dificuldades nos *conhecimentos estratégicos*, pois tiveram dificuldades em rejeitar a estratégia inadequada da média aritmética, alguns com menor intensidade, e em compreender que não era possível obter duas respostas, pois não satisfazia o enunciado. Também tiveram dificuldades em elaborar um plano de solução adequado. A intervenção da pesquisadora foi importante para que os alunos adequassem suas estratégias, de modo que as levassem à solução. De modo semelhante, na pesquisa de Matsuda (2017), cinco (de sete) grupos de alunos de 7° ano apresentaram dificuldades em planejar uma estratégia condizente (etapa de *Planejamento*), em duas (de três) situações de Matemática envolvendo equações de 1° grau.

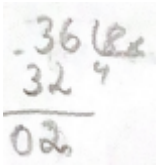
4.1.3 Execução

Em pelo menos uma das estratégias elaboradas pelos grupos, os alunos apresentaram dificuldades em executá-las. Vejamos:

Grupo A: Quando este grupo decidiu executar a estratégia de juntar as duas turmas do sexto ano, e dividir esse valor por números pares, os alunos perguntaram uns aos outros o

resultado de alguns cálculos de divisão, como por exemplo "*Quanto que dá dividido por 2?* " (A3), "*Qual é a metade de 8?* " (A2) e "*Quanto que é 30 dividido por 4?* " (A2). Isso pode ser simplesmente por preguiça de fazer os cálculos, ou porque consideravam que os outros colegas faziam os cálculos mentais mais rapidamente. Já no momento em que o grupo estava executando a estratégia final, é possível notar na folha contendo a situação de Matemática do aluno A2 um erro no algoritmo da divisão de 36 por 8, como mostra a Figura 13. O erro está na diferença, isto é, no resultado da subtração $36 - 32$, pois o aluno escreveu 2, onde o correto era 4, possivelmente por falta de atenção, já que o aluno não apresentou dificuldades nos demais cálculos envolvendo tal algoritmo.

Figura 13 – Erro de cálculo do aluno A2

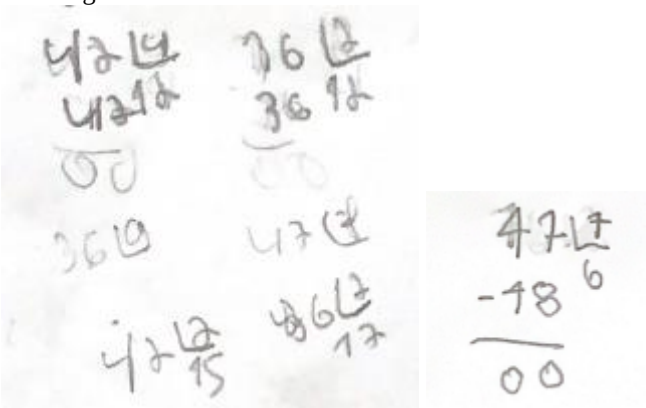


Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Grupo B: Quando este grupo estava executando a estratégia de determinação do quociente, cometeu o equívoco de calcular 42÷4 obtendo 12 como quociente e 0 como resto, em que o correto seria 10 como quociente e 2 como resto. Nessa direção, temos a seguinte fala: "*Mano, 42 dividido por 4 dá 12, e 46...e...*" (B4). Além disso, reforçaram esse erro no momento em que estavam dialogando com a pesquisadora, especificamente quando esta perguntou "*Dá para dividir o 42 por 4?* " (P) e eles responderam "*Dá*" (B1, B2, B4). Esse erro foi registrado na folha contendo a situação de Matemática, que a utilizaram praticamente como folha de rascunho. Isso demonstra que os alunos deste grupo não compreenderam o processo de divisão quando o resto é diferente de zero. Nesse caso, a pesquisadora interveio e realizou o cálculo junto com eles.

Além desta dificuldade, os alunos ainda apresentaram equívocos em outros cálculos envolvendo o algoritmo da divisão, como, por exemplo, obter quocientes e produtos errados, como em "*Deu 36 a resposta de 78 dividido por 2*" (B2) e os registros da Figura 14.

Figura 14 – Erros de cálculos dos alunos B2 e B3



Fonte: Dados da pesquisa (2024)

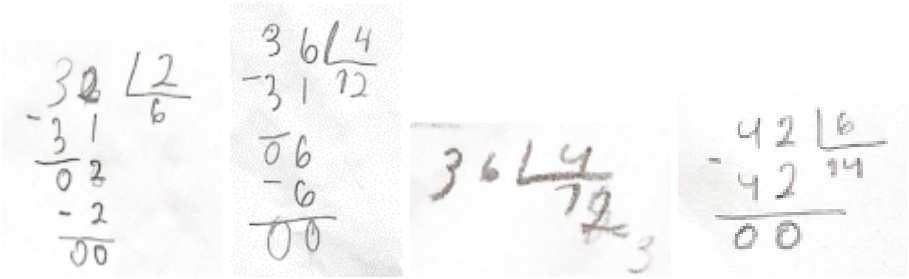
Nos casos da divisão de 46 por 2 e da divisão de 47 por 7, além de determinarem quocientes e produtos errados, utilizaram valores que não fazem sentido como dividendo, já que 46 e 47 não são os dados do enunciado e nem resultado da junção das turmas, esse equívoco poderia ter sido evitado se os alunos estivessem mais atentos. Ainda no último caso é possível perceber outros dois erros: realizar a subtração de um valor menor por um maior, dentro do conjunto dos números naturais, e obter 00 como resultado da subtração de 47 por 48.

Grupo C: Os alunos deste grupo perguntaram se podiam utilizar a calculadora para efetuar os cálculos, e mostraram ter dificuldades na tabuada, como fica claro em "*Você vai fazer a do 6, porque a do 6 eu não sei*" (C3), "*Eu não sei nem a do 1, quem dirá do 6*" (C2), "*36 dá quanto na tabuada do 6?* " (C4). Assim como no grupo B, houve um caso em que utilizaram um valor que não faz sentido como dividendo, a saber: 32, e determinaram o quociente errado, como C3 explica "*32 dividido por 2, 6*" e C1 registra em sua folha contendo a situação de Matemática. Um aluno determinou incorretamente o quociente de 36 ÷ 4, no entanto, foi possível perceber que ele apenas se confundiu e realizou a divisão por 3 e não por 4, pois com exceção disso, seus cálculos foram corretos. Por outro lado, outro aluno determinou o mesmo quociente incorreto, porém como não "armou" os cálculos, não podemos inferir o mesmo, assim como na divisão de 42 por 6, que resultou em 14, no qual o correto seria 7. Além disso, foi possível perceber um erro em relação a um produto em "*[...] 6 vezes 7, 41, né?* " (C2). Esses erros ocorreram possivelmente devido à dificuldade em compreender a tabuada e a operação multiplicação. Exemplos destes erros se encontram na Figura 15.

Por fim, na última estratégia utilizada por este grupo, ao encontrar as possibilidades de formar os grupos nas turmas de sexto ano A e B, um aluno registrou que "*as duas turmas são divisíveis por 0, 2 3, 6*" (C3), em que o erro está em não compreender que nenhum número é

divisível por zero, e isso pode ter acontecido pelo fato dele ter se confundido com a ideia de que zero é divisível por qualquer número natural.

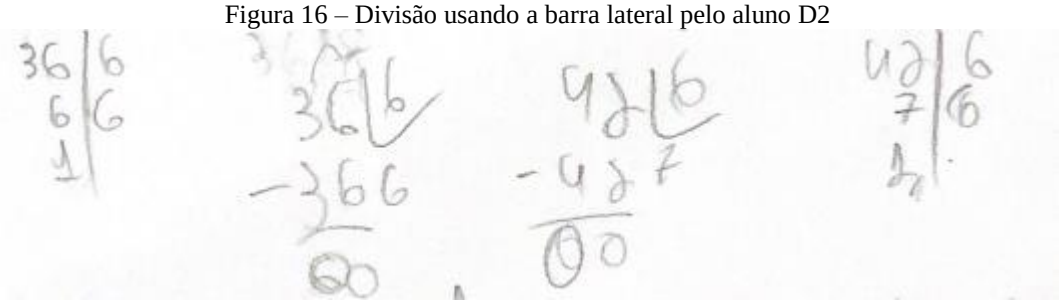
Figura 15 – Erros de cálculos dos alunos C1, C2 e C4



Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Grupo D: Na folha contendo a situação de Matemática, um dos alunos deste grupo fez 36 ÷ 6 e 42 ÷ 6 por meio de dois métodos, o método da chave (algoritmo da divisão) e utilizando uma barra lateral, como mostra a Figura 16. Se olhássemos para isso separadamente, iríamos considerar que este aluno não compreendeu o método da decomposição em fatores primos, já que começou dividindo por números que não são primos, porém, na tentativa de utilizar a estratégia da decomposição em fatores primos apresentada na ação de *Discussão das estratégias dos alunos* (Figura 8), como já comentamos, percebemos que ele não demonstrou dificuldade em compreender o método. No entanto, ele se equivocou ao colocar 16 como resultado da divisão de 36 por 2, e como os demais números eram recorrentes desse resultado, estes também foram equivocados. Acreditamos que este erro ocorreu devido à falta de atenção, já que os demais cálculos estavam corretos.

Figura 16 – Divisão usando a barra lateral pelo aluno D2



Fonte: Dados da pesquisa (2024)

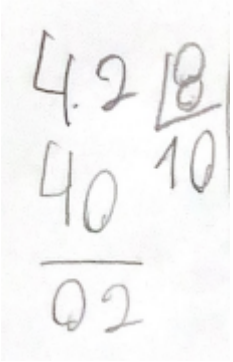
Outro aluno apresentou indícios de que não havia compreendido os critérios de divisibilidade que já havia estudado, como fica claro em: "*Não lembro nem o que comi no café da manhã*" e "*Se eu não lembro do 2, vou lembrar do 4?* " (D3). Os demais alunos não apresentaram erros procedimentais, mas isso não quer dizer que eles não tenham dificuldades.

Grupo E: Em especial, um aluno deste grupo se destacou por demonstrar ter muitas dificuldades nos cálculos, possivelmente devido a uma incompreensão das operações de divisão e multiplicação, que deveria ter aprendido nos anos anteriores. Por isso, a pesquisadora precisou dar uma atenção maior para ele, no entanto, ele faltou em várias aulas, o que dificultou seu acompanhamento e influenciou negativamente sua aprendizagem.

Em geral, ao executar a estratégia da lista de divisores, o grupo apresentou dificuldade em realizar alguns cálculos de divisão, como, por exemplo, considerar que era possível dividir a turma do sexto ano A, que tinha 42 alunos, em grupos de 12, ou seja, obtiveram resto zero na divisão de 42 por 12, o que é um erro, pois 42 ÷ 12 tem como quociente 3 e resto 6. Como exemplo, temos o seguinte registro: "[...] podemos dividir os grupos em: 2, 3, 6, <u>12</u> e 21 no 6°A, e no 6°B: 2, 3, 6 e 12" (E3, grifo nosso).

Grupo F: Na folha contendo a situação de Matemática de um dos alunos deste grupo, foi possível observar um erro de cálculo, ao executar a estratégia de tentativa e erro, como mostra a Figura 17. O erro está em determinar o 10 como quociente, eventualmente se ele tivesse prestado mais atenção, perceberia que o quociente correto era 5, já que 5 vezes 8 resulta em 40, ou perceberia que 10 vezes 8 resulta em um valor incompatível com o valor original, no caso 42.

Figura 17 – Erro de cálculo do aluno F3



Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Grupo G: Um dos alunos, quando estava realizando a estratégia da lista de divisores, cometeu o erro de considerar que era possível dividir os alunos do sexto ano A, de 42 alunos, em grupos de 9 integrantes, que foi registrado em sua fala "*Para mim, deu o trinta e… o sexto B deu 2, 3, 9 e 6, o quarenta…o sexto A deu 2, 3, 6 e 9*" (G4). No entanto, ao ser questionado por outros alunos, ele se corrigiu, desconsiderando que podem ser formados grupos de 9 integrantes no sexto ano A. O diálogo a seguir deixa claro essa percepção do próprio aluno.

Os dois vão dar a mesma coisa, né? (G1)
É, só que daí o do sexto ano B vai ter o 9 (G2)
O 9? (G1)
É (G2)
Ué, mas o sexto A não tem? (G1)
Não, o sexto ano A não (G3)
Ah, então me ajuda aí (G1)
Ô G4… ué, mas você colocou… (G1)
Não tem no sexto ano A. Eu fiz a conta e não deu (G2)
Nossa, é verdade [...] (G4)

Além desse equívoco que logo foi corrigido pelos próprios alunos, não encontramos nenhum outro.

De modo geral, consideramos que os alunos de todos os grupos apresentaram dificuldades nos *conhecimentos procedimentais* durante a execução das estratégias, conforme sintetiza o Quadro 16, especialmente relacionados ao algoritmo da divisão. Essas mesmas adversidades são encontradas em turmas de 6°, 8° e 9° ano do Ensino Fundamental (Andrade; Gomes; Mafra, 2020; Fiorelli, 2017; A. Silva, 2019), o que é prejudicial para a aprendizagem deles.

Quadro 16 – Erros nos conhecimentos procedimentais

Grupos	Erros encontrados
A	- No resultado da subtração de 36-32
B	- No algoritmo da divisão de 42 ÷ 4 - No algoritmo da divisão de 78 ÷ 2 - No algoritmo da divisão de 46 ÷ 2 - No algoritmo da divisão de 42 ÷ 2 - No algoritmo da divisão de 47 ÷ 7 - No algoritmo da divisão de 36 ÷ 2 - Na subtração de um número natural menor por um número natural maior - No resultado da subtração de 47 - 48
C	- No algoritmo da divisão de 32 ÷ 2 - No algoritmo da divisão de 36 ÷ 4 - No algoritmo da divisão de 42 ÷ 6 - No resultado da multiplicação de 6 × 7 - Que 42 e 36 são divisíveis por 0
D	- No algoritmo da divisão de 36 ÷ 2
E	- No algoritmo da divisão de 42 ÷ 12
F	- No algoritmo da divisão de 42 ÷ 8
G	- Que 9 é divisor de 42

Fonte: Dados da pesquisa (2024)

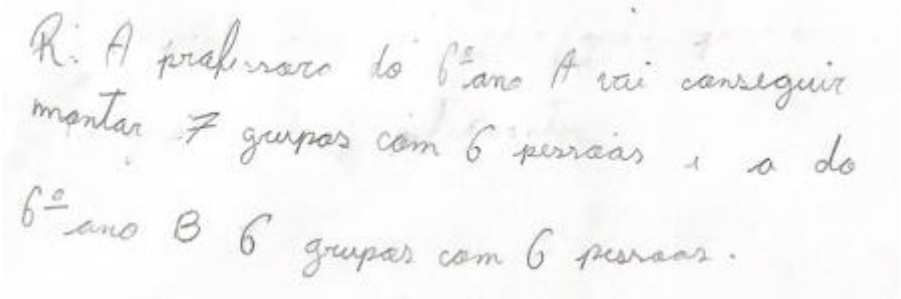
Assim, além de apresentar dificuldades no procedimento de divisão de dois números naturais, os participantes de nossa pesquisa também demonstraram dúvidas em relação à outras operações, como subtração e multiplicação, indo ao encontro da pesquisa de Alves, Carneiro e Carneiro (2022), em que observaram que muitos alunos chegam nos anos finais do Ensino Fundamental com dificuldades nas quatro operações aritméticas.

4.1.4 Monitoramento

Nesta última etapa do processo de resolução de problemas, analisaremos dois aspectos da 3ª ação de ensino, a saber: verificação da resposta e revisão da resolução. Como vimos anteriormente, os grupos, com exceção do grupo D, obtiveram algumas respostas incorretas durante o processo de resolução. No entanto, neste momento, consideraremos apenas a resposta correta final.

Em relação ao primeiro aspecto, foi possível observar que apenas o grupo A demonstrou indícios de que avaliou se a solução estava, de fato, respondendo ao enunciado do problema. Isso ocorreu porque a pesquisadora, após os alunos apresentarem o valor numérico como resposta, questionou sobre o que significava tal valor, perguntando: "O que é 6? Escreve certinho" (P). Esse questionamento fez com que os alunos relessem a situação de Matemática e respondessem de maneira a considerar tanto a pergunta quanto o contexto, como, por exemplo, a resposta de A1 na Figura 18.

Figura 18 – Exemplo de resposta de acordo com a pergunta e o contexto (do aluno A1)


R: A professora do 6º ano A vai conseguir montar 7 grupos com 6 pessoas e o do 6º ano B 6 grupos com 6 pessoas.

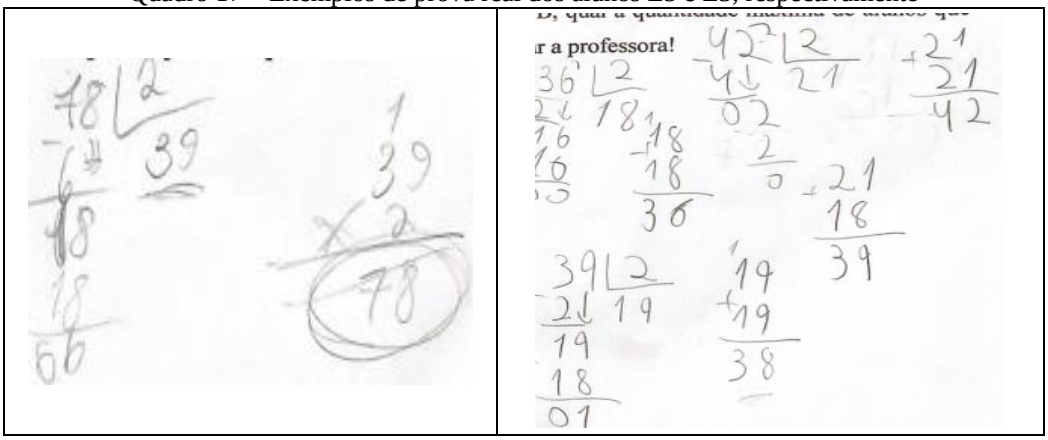
Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Por outro lado, os grupos B, C, D, E, F e G não avaliaram a solução encontrada. Se a pesquisadora tivesse feito o mesmo questionamento que fez para o grupo A, possivelmente esses outros grupos teriam sido submetidos a verificar a resposta. Nessa direção, na pesquisa de Martinez e Valverde (2022), quatro alunos do Ensino Médio resolveram problemas cujas resoluções exigiam o cálculo do MDC, sem demonstrar dúvidas sobre a validade da solução, no entanto, com a mediação do entrevistador, que defendeu a investigação da visão retrospectiva do problema, os alunos perceberam seus equívocos e corrigiram suas respostas, concluindo que “[...] a revisão dos resultados é uma ferramenta útil na detecção de erros” (Martinez; Valverde, 2022, p. 10, tradução nossa[10]).

[10] “[...] the review of the results is a useful tool in the detection of errors”

No entanto, analisamos que os grupos E e F evidenciaram indícios da realização da etapa de Monitoramento no momento em que decidiram fazer a prova real. Isto serviu para verificar se o resultado de uma determinada operação estava correto. O Quadro 17 mostra exemplos deste procedimento utilizado pelo grupo E.

Quadro 17 – Exemplos de prova real dos alunos E5 e E3, respectivamente

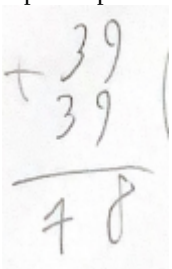


Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Na primeira coluna é possível notar que o aluno calculou 78 dividido por 2, e para conferir o resultado, multiplicou o quociente obtido por 2. Já na segunda coluna, ao invés de realizar a operação de multiplicação de maneira usual para conferir o resultado da divisão, o aluno optou por realizar uma adição, o que é incomum, mas de maneira nenhuma errada, já que a multiplicação é uma soma sucessiva de fatores iguais, no entanto, é possível que ele tenha escolhido essa opção devido à dificuldade ou receio em realizar cálculos de multiplicação. Como explicação, o aluno disse a seu grupo que *"[...] você vai pegar esse resultado, daí você tem que pegar o mesmo número e fazer mais, para comprovar que vai dar o número que você está dividindo*" (E4).

Ainda nessa linha de pensamento, foi possível observar, na estratégia inicial de média aritmética, que um aluno do grupo F utilizou esse procedimento para conferir se o resultado da operação de divisão estava correto. Nesse caso, esse aluno também optou por realizar a adição, o que é ilustrado na Figura 19.

Figura 19 – Exemplo de prova real do aluno F1



Fonte: Dados da pesquisa (2024)

No grupo A, embora um dos alunos tenha comentado sobre a prova real, em "*Tem que tirar a prova real, você sabe né?* " (A5), esse procedimento não foi registrado em momento algum.

O outro aspecto importante no monitoramento é o ato de rever a resolução, ou seja, "[...] que a pessoa reveja o processo de resolução do problema que trilhou" (Proença, 2018, p. 28). Somente os grupos D e F realizaram a verificação da resposta. No grupo D, assim que os alunos afirmaram ter acabado de resolver, a pesquisadora questionou sobre como eles resolveram e a partir disso, explicaram toda sua resolução, conforme o seguinte diálogo:

> *O que vocês fizeram? (P)*
> *Tá tudo no gravador (D4)*
> *O máximo de alunos... o máximo de alunos... (D2)*
> *Por 2, por 3 e por 6 (D3)*
> *O que é por 2, por 3 e por 6? (P)*
> *O 2 é porque pode formar dupla, ou grupos de 3 ou grupos de 6 (D2)*
> *Em qual turma? (P)*
> *Nas duas (D2)*
> *É divisível por 2 quando o número for par, por 3 quando a soma dos números for divisível por 3, e por 6 quando for por 2 e por 3 (D3)*
> *Tá, e a resposta é? (P)*
> *6 (D3)*

Isso mostra que este grupo foi capaz de fazer todo o processo de resolução novamente, indicando ter habilidades de reconstrução rápida. Essa habilidade também é perceptível nos alunos do grupo F, que por iniciativa própria, isto é, sem a interferência da pesquisadora, conversaram entre si de modo a recapitular o caminho que percorreram, para esclarecer o que eles iriam apresentar na lousa na 4ª ação do EAMvRP. Neste caso, temos a seguinte declaração: "*Nós fizemos 36 dividido por 2 e 42 dividido por 2, que vai dar certo, ou seja, vai dar, vai dar… Espera, é melhor explicar assim, a gente fez as contas e o grupo que dá é 2, 3 e 6. A quantidade máxima é 6, então a resposta é 6. Pronto, explica assim*" (F1).

Por outro lado, os grupos A, B, C, E e G não forneceram indícios de que se preocuparam em rever a resolução. O Quadro 18 sintetiza a relação dos grupos com os dois aspectos considerados no Monitoramento.

Quadro 18 – Monitoramento dos grupos

Grupos	**Verificação da resposta**		**Revisão da resolução**	
	Com auxílio da pesquisadora	Sem auxílio da pesquisadora	Com auxílio da pesquisadora	Sem auxílio da pesquisadora
A	√	☒	☒	☒
B	☒	☒	☒	☒
C	☒	☒	☒	☒
D	☒	☒	√	☒
E	☒	☒	☒	☒
F	☒	☒	☒	√
G	☒	☒	☒	☒

Legenda: √: manifestado; ☒: não manifestado.

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Assim, analisamos que, em relação à última resposta dada pelos grupos, um grupo (grupo A) realizou a verificação da resposta e dois grupos (grupos D e F) realizaram a revisão da resolução, enquanto os demais (grupos B, C, E e G) não apresentaram indícios de que monitoraram suas respostas, isto é, de sete grupos, em três deles foram identificados os conhecimentos relacionados com a etapa de Monitoramento. Algo similar ocorreu no estudo de Rozario (2022), em que tais conhecimentos foram revelados em apenas dois (de cinco) grupos de alunos de 6° ano, cuja situação de Matemática envolvia área de triângulos. Nestes casos, é provável que os alunos não tenham o hábito de verificar a resposta, já que o método de ensino tradicional (com a apresentação do conteúdo, para depois fornecer exemplos e aplicar em exercícios ou situações contextualizadas) não valoriza tal comportamento.

Também analisamos que poucos alunos, apenas de dois grupos, realizaram a prova real, a fim de conferir se o resultado de uma operação estava correto ou não. Uma pesquisa que possui resultados semelhantes a esse é o de Amaral (2019), em que apenas um (de quatro) alunos participantes realizou operações inversas para verificar seus cálculos em atividades de MDC. Consideramos que, se todos os alunos monitorassem suas respostas e percebessem a importância de realizar esse procedimento talvez tivessem percebido as respostas incorretas e realizassem novos cálculos, a fim de obter respostas corretas.

4.2 Eixo 2 - Compreensões dos alunos sobre o MDC de números naturais

Neste eixo, serão analisadas as respostas individuais dos alunos, pois nossa intenção é investigar as compreensões pessoais de cada aluno. Assim, os exemplos apresentados serão retirados das respostas dos alunos, na íntegra, sem correção ortográfica, como explicamos anteriormente na seção metodológica. Em cada uma das três subseções a seguir, propusemos categorias, definidas *a posteriori*.

4.2.1 Compreensões dos alunos sobre os pontos em comum das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos

Após a apresentação dos grupos na lousa, para compreender as percepções dos alunos em relação aos pontos em comum existentes nas diferentes estratégias de resolução utilizadas, foi proposto o Questionário 1 (Quadro 11) para que os alunos respondessem individualmente: "O que você percebe em comum entre essas estratégias (caminhos) que vocês apresentaram na lousa?"

Agrupamos as respostas em três categorias: *Explicação da estratégia utilizada*; *Indicação de algo além da divisão*; *Indicação somente da divisão*. Na primeira categoria, encontram-se as respostas que não explicaram os pontos em comum entre as estratégias, mas apenas descreveram a estratégia utilizada pelo seu grupo, sem relacioná-la com as demais. Na segunda categoria, estão as respostas que apontaram que os grupos realizaram algumas divisões e algo a mais, como, por exemplo, a decomposição em fatores primos, o uso de critérios de divisibilidade, a realização de multiplicações ou a determinação dos divisores de 42 e 36. Por fim, na terceira categoria, estão as respostas que indicaram que os grupos realizaram apenas divisões, seja por números primos, números pares ou valores específicos, como 2, 3 e 6. A Tabela 2 a seguir mostra como as respostas foram agrupadas.

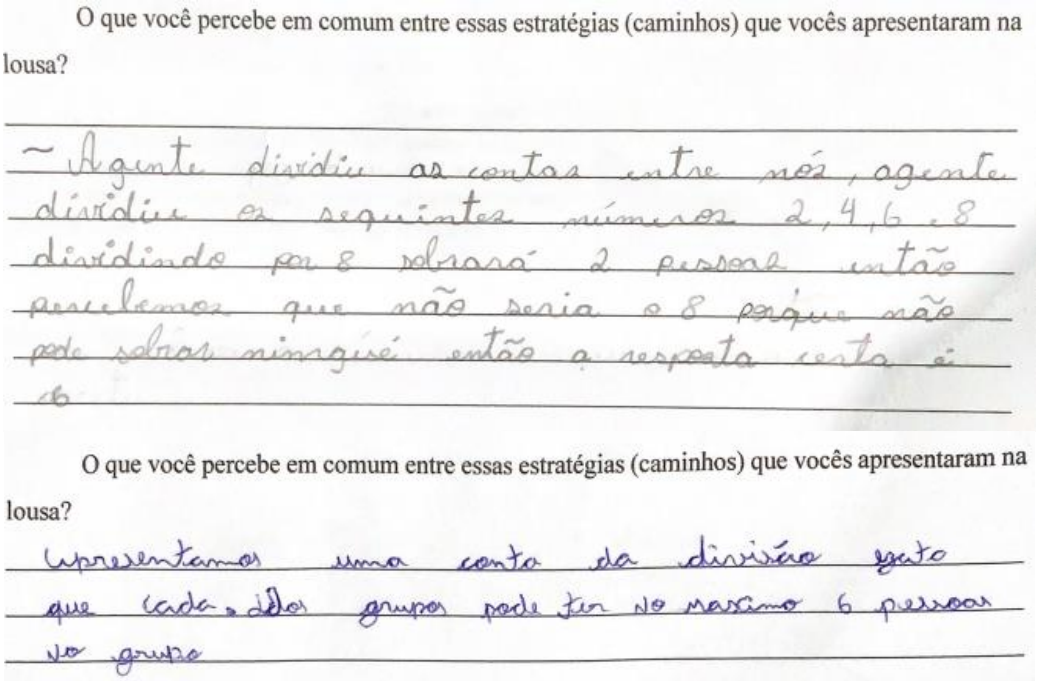
Tabela 2 – Compreensões sobre os pontos em comum das estratégias

Categorias	**Alunos**	**Quantidade de alunos**
Explicação da estratégia utilizada	A2, B5	2
Indicação de algo além da divisão	A5, B1, B4, C1, C3, D3, D4, F1	8
Indicação somente da divisão	A1, A3, A4, B2, B3, C2, C4, D1, D2, E1, E2, E3, E4, E5, F2, F3, G1, G2, G3, G4	20

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Na categoria ‘Explicação da estratégia utilizada’ dois alunos explicaram a estratégia que seu grupo utilizou, mas não apontou semelhanças com as outras estratégias apresentadas, o que pode indicar a não compreensão da pergunta. Nesse sentido, o aluno A2 registrou que em seu grupo cada aluno ficou responsável por realizar um cálculo de divisão por números pares, explicou por que não era possível organizar grupos de 8 pessoas e indicou a resposta da situação de Matemática. E B5 argumentou que seu grupo apresentou um cálculo de divisão exata, não entrando em maiores detalhes, e também apontou a resposta obtida da situação de Matemática. Estas respostas se encontram, na devida ordem, na Figura 20.

Figura 20 – Respostas do questionário 1 com explicação da estratégia (dos alunos A2 e B5, respectivamente)


O que você percebe em comum entre essas estratégias (caminhos) que vocês apresentaram na lousa?

~ Agente dividiu as contas entre nós, agente dividiu os seguintes números 2, 4, 6 e 8 dividindo por 8 sobrará 2 pessoa então percebemos que não seria o 8 porque não pode sobrar ninguém então a resposta certa é 6

O que você percebe em comum entre essas estratégias (caminhos) que vocês apresentaram na lousa?

Apresentamos uma conta da divisão exata que cada dos grupos pode ter no maximo 6 pessoas no grupo

Fonte: Dados da pesquisa (2024)

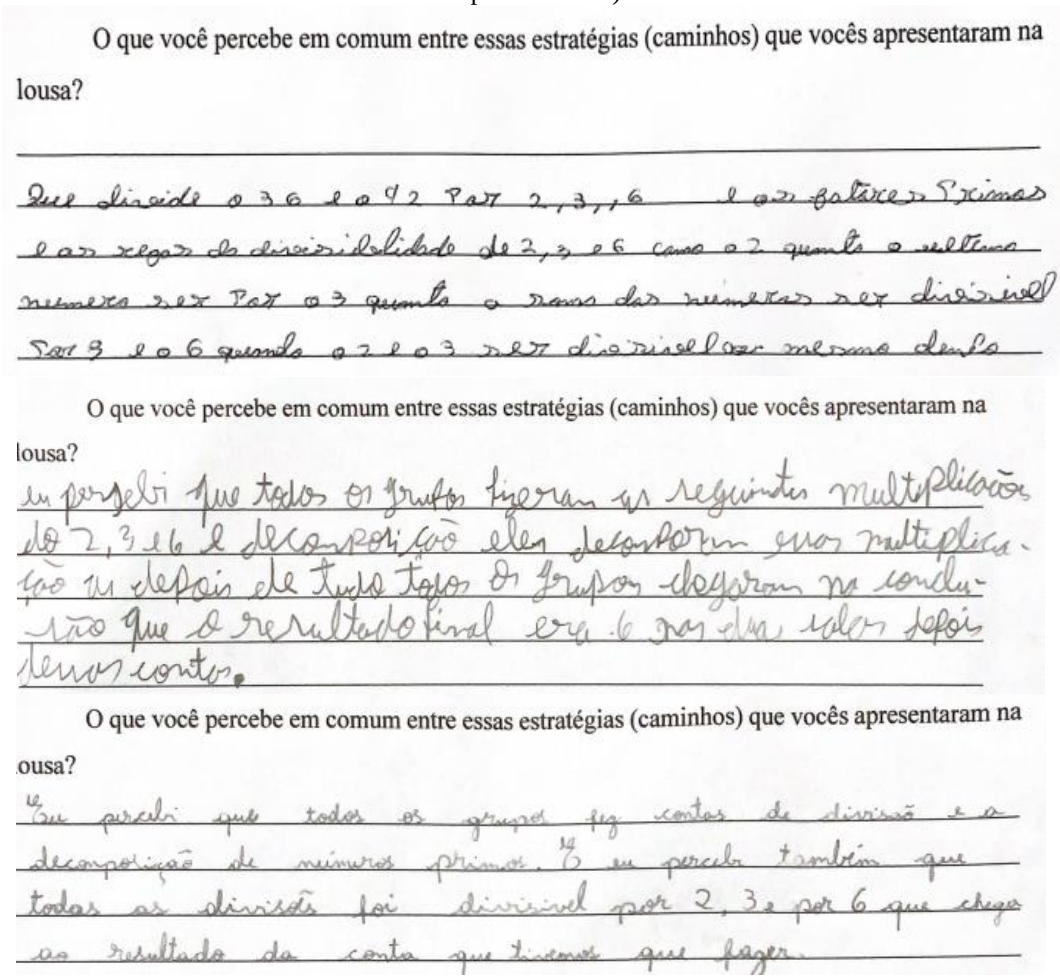
Na categoria *‘Indicação de algo além da divisão’*, as oito respostas apontaram a divisão e também outro ponto em comum entre as estratégias. Neste caso, esse outro ponto não foi unânime, pois um aluno comentou sobre os critérios de divisibilidade, outros dois sobre multiplicações e os outros cinco sobre a decomposição em fatores primos. Em relação aos critérios de divisibilidade, o aluno D3 os explicou corretamente, e consideramos que a resposta dele se encaixa nesta categoria, pois também indica que foi realizada uma divisão, como ocorreu com os demais grupos. A resposta deste aluno é a primeira da Figura 21.

Os alunos B4 e D4 registraram que os grupos realizaram cálculos envolvendo multiplicação, a saber: “[...] todos os grupos fizeram as seguintes multiplicações de 2, 3 e 6 e [...] decomporam suas multiplicações [...]” (B4) e “Que cada um dividiu por 2, 3, 6 e

multiplicaram para saber o número que dá 42 e 36” (D4). Nesse caso, consideramos que B4 se confundiu e trocou as operações de divisão por multiplicação. Ao registrar erroneamente a ‘decomposição da multiplicação’, demonstrou incompreensão conceitual, visto que o correto seria *decomposição de números naturais em fatores primos*, já que “decomposição de multiplicação” tem outro sentido. A resposta deste aluno, na íntegra, é a segunda da Figura 21. Em relação a D4, consideramos que ele citou a multiplicação apenas para realizar a prova real, sendo a divisão a operação principal.

Das respostas que mencionaram a decomposição em fatores primos, além da divisão como pontos em comum, somente C3 o fez adequadamente. Isso porque os outros quatro alunos se expressaram inadequadamente, utilizando as seguintes expressões: *‘decomposição de números primos’*, que sugere que os números primos é que são decompostos; *‘divisibilidade em números primos’*, misturando erroneamente os conceitos; e *‘fatores de números primos’*. Para exemplificar, temos o registro de A5, apresentado na terceira resposta da Figura 21. Como mencionado anteriormente, a decomposição em fatores primos foi trabalhada em aulas anteriores à implementação de nossa proposta de ensino. No entanto, é possível notar que tal ideia não foi compreendida pela maioria dos alunos.

Figura 21 – Respostas do questionário 1 com mais de um ponto em comum (dos alunos D3, B4 e A5, respectivamente)



O que você percebe em comum entre essas estratégias (caminhos) que vocês apresentaram na lousa?

Que divide o 36 e o 42 por 2, 3, 6 e as potências primas e as regras de divisibilidade de 2, 3 e 6 como o 2 quando o ultimo numero ser por o 3 quando a soma dos numeros ser divisivel por 3 e o 6 quando o 2 e o 3 ser divisivel ao mesmo tempo

O que você percebe em comum entre essas estratégias (caminhos) que vocês apresentaram na lousa?

eu percebi que todos os grupos fizeram as seguintes multiplicações do 2, 3 e 6 e decomposição eles decompoem suas multiplicação e depois de tudo todos os grupos chegaram na conclusão que o resultado final era 6 mas eles, eles depois fizeram contas.

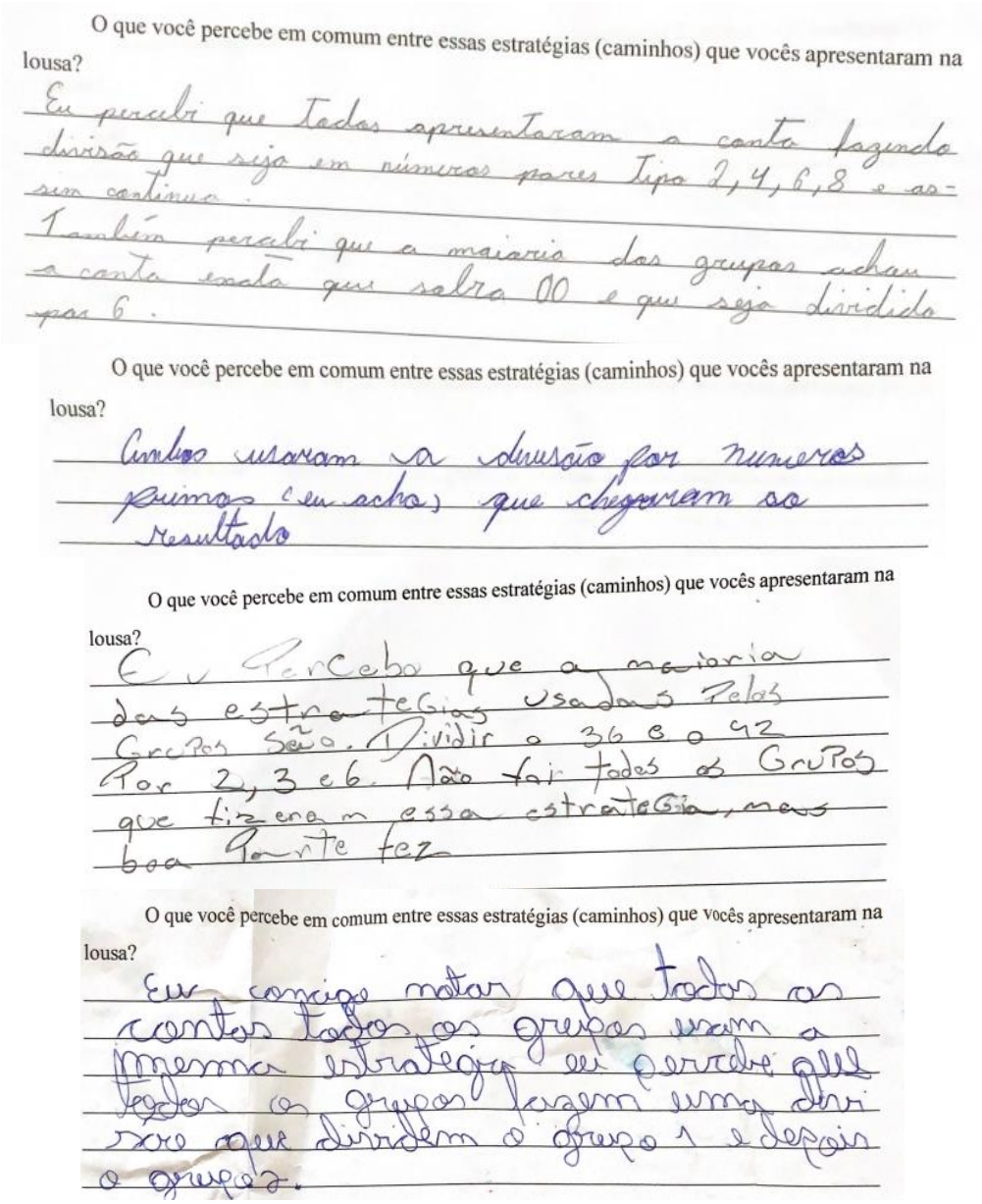
O que você percebe em comum entre essas estratégias (caminhos) que vocês apresentaram na lousa?

"Eu percebi que todos os grupos fez contas de divisão e a decomposição de numeros primos." "Eu percebi também que todas as divisões foi divisivel por 2, 3 e por 6 que chega ao resultado da conta que tivemos que fazer.

Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Por fim, na categoria ‘Indicação somente da divisão’, vinte alunos indicaram que o ponto em comum foi a realização de cálculos de divisão, neste sentido, o aluno G3 nomeou a estratégia comum como ‘estratégia de divisão’ em “Em quase todos os grupos fizeram a estratégia de divisão”. Dentre as respostas desta categoria, os alunos mencionaram as divisões de números pares (primeira resposta da Figura 22); ou divisão por números primos, o que na verdade não foi realizada por nenhum grupo (segunda resposta da Figura 22); ou divisões de 42 e 36 por 2, 3 e 6 (terceira resposta da Figura 22); ou somente divisões, não explicando quais eram os dividendos e os divisores (última resposta da Figura 22).

Figura 22 – Respostas do questionário 1 sendo a divisão o ponto em comum (dos alunos A1, E5, F2 e E2, respectivamente)



O que você percebe em comum entre essas estratégias (caminhos) que vocês apresentaram na lousa?

Eu percebi que todas apresentaram a conta fazendo divisão que seja em números pares tipo 2, 4, 6, 8 e assim continua.
Também percebi que a maioria dos grupos achou a conta exata que saiu 00 e que seja dividido por 6.

O que você percebe em comum entre essas estratégias (caminhos) que vocês apresentaram na lousa?

Todos usaram a divisão por numeros primos (eu acho) que chegaram ao resultado

O que você percebe em comum entre essas estratégias (caminhos) que vocês apresentaram na lousa?

Eu percebo que a maioria das estrategias usadas pelos grupos são. Dividir o 36 e o 42 por 2, 3 e 6. Não foi todos os grupos que fizeram essa estrategia, mas boa parte fez

O que você percebe em comum entre essas estratégias (caminhos) que vocês apresentaram na lousa?

Eu consigo notar que todas as contas todos os grupos usam a mesma estrategia eu percebi que todos os grupos fazem uma divisão que dividem o grupo 1 e depois o grupo 2.

Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Portanto, concluímos que, embora os alunos tenham tido dificuldade em organizar seus pensamentos em palavras, se expressando muitas vezes inadequadamente, em geral, eles perceberam que por trás das estratégias está a ideia de determinar os divisores comuns de 42 e 36, seja pelo algoritmo usual da divisão, seja pelos critérios de divisibilidade.

4.2.2 Impressões dos alunos sobre as estratégias

Com o objetivo de entender qual das estratégias de resolução é considerada mais compreensível pelos alunos, foi proposta a primeira indagação do Questionário 2 (Quadro 13): “Você acha que a resolução do seu grupo é mais fácil ou mais difícil do que a resolução da professora, que foi pelo uso da forma matemática do Máximo Divisor Comum (MDC)? Por quê?” Neste caso, a professora mencionada na questão é a própria pesquisadora. Assim, ao longo do texto desta subseção e da subseção seguinte, utilizaremos ambos os termos para nos referirmos à pesquisadora.

As respostas foram separadas em quatro categorias, conforme a Tabela 3, a saber: *Resposta em branco*, *Indeterminado*, *Maior facilidade na estratégia usada pela pesquisadora* e *Maior facilidade na estratégia do seu grupo*. Na primeira categoria, estão as respostas dos alunos que deixaram a questão em branco, enquanto que, na segunda, estão as respostas nas quais não foi possível determinar qual estratégia os alunos consideraram mais fácil, pois escreveram algo que não corresponde ao que foi perguntado. Na terceira categoria, encontram-se as respostas dos alunos que consideraram que a estratégia da pesquisadora foi mais fácil do que a utilizada por seu grupo. Ao contrário, na quarta categoria, estão as respostas dos alunos que consideraram mais fácil a estratégia que seu próprio grupo utilizou.

Tabela 3 – Impressões sobre as estratégias utilizadas

Categorias	**Alunos**	**Quantidade de alunos**
Resposta em branco	C1, E2, G3	3
Indeterminado	B1, C2, D3, E4, E5	5
Maior facilidade na estratégia usada pela pesquisadora	A4, B2, D4, F3, G1, G4	6
Maior facilidade na estratégia do seu grupo	A1, A2, A3, A5, B3, B4, B5, C3, C4, D1, D2, E1, E3, F1, F2, G2	16

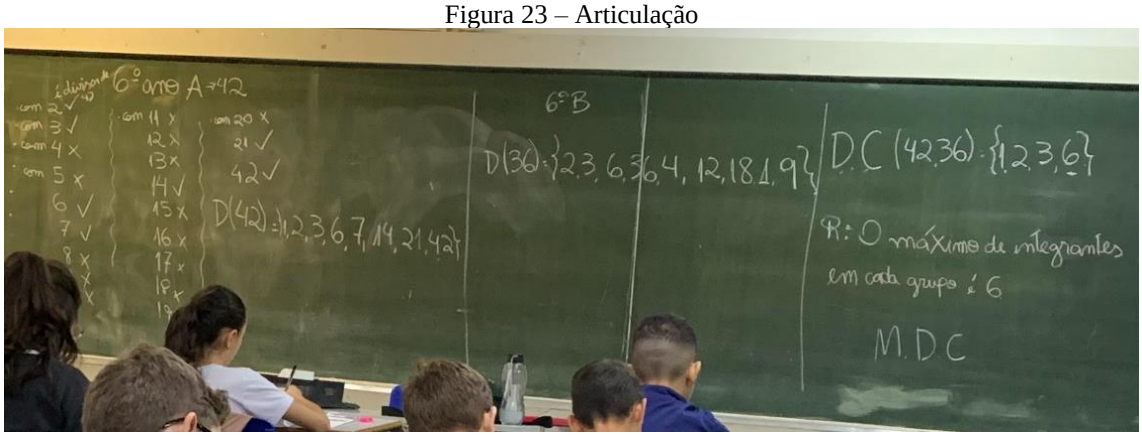
Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Na primeira categoria, três alunos deixaram a questão em branco. Na segunda categoria, cinco alunos não responderam diretamente ao que a questão perguntava, pois não indicaram qual estratégia consideraram mais fácil. O aluno B1 registrou: “Por que ela é inteligente e ela é muito inteligente”, ou seja, fez apenas um comentário, possivelmente sobre a pesquisadora, mas não apontou sua impressão sobre a estratégia utilizada por ela, nem sobre a estratégia que ele próprio havia utilizado. Com as respostas dos alunos E4 e C2, não é possível afirmar com clareza qual estratégia eles consideraram mais fácil, já que o primeiro escreveu: “Não, porque o da professora é mais detalhado e resumido”, e o segundo, “Não foi a conta difícil, é porque é conta meio diferente”. Para finalizar as respostas desta categoria, os alunos D3 e E5 indicaram

apenas uma estratégia, mas não apontaram se a consideraram mais fácil ou mais difícil, como fica claro nas frases: “Por que por 2, 3, 6” e “Todos chegaram ao resultado usando a divisibilidade, os critérios dela”.

Logo, consideramos que o fato de deixarem a questão em branco e não responderem efetivamente à pergunta possivelmente ocorreu porque não entenderam o que a questão pedia e não compreenderam a estratégia utilizada pela pesquisadora no momento da 5ª ação de ensino, a saber: *Articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo*. Nesta ação, a pesquisadora, em colaboração com os alunos, determinou as possíveis organizações dos alunos do 6º ano A em grupos, correspondentes aos divisores da quantidade de alunos dessa turma, fez o mesmo com o 6º ano B, em seguida determinou os divisores comuns e, por fim, indicou o maior deles. A Figura 23 mostra como essa articulação foi registrada.

Figura 23 – Articulação



Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Na categoria *‘Maior facilidade na estratégia usada pela pesquisadora’*, seis alunos consideraram que a estratégia seguida pela pesquisadora no momento da articulação foi mais fácil do que a utilizada por seus grupos. Os alunos A4 e D4 consideraram a estratégia de seu grupo mais difícil e se justificaram explicando o que fizeram, cujas respectivas respostas foram: “Eu acho um pouco difícil a minha, porque tem que fazer a divisão por 2, 3, 4, etc. [...]” e “Mais difícil, porque a gente multiplicou até o 9 e dividimos, comparamos os números”. Nesta resposta, que possui muitos erros ortográficos, é possível perceber que o aluno não compreendeu a estratégia que seu grupo utilizou e nem a da pesquisadora, pois, em nenhuma dessas estratégias, foram realizados cálculos envolvendo multiplicação.

Os alunos G4 e F3 também preferiram a estratégia utilizada pela pesquisadora, pois consideraram que esta fornece um caminho mais fácil para encontrar a solução, com as seguintes justificativas, respectivamente: “[...] porque o MDC é mais fácil do que toda essa

divisão que o grupo G fez, que é o meu" e "[...] MDC é melhor e fácil porque a gente pega os números e divide até achar [...]". Já a resposta do aluno G1, embora deixe claro o motivo de sua preferência pela estratégia do seu grupo, ao afirmar "Eu acho que a resolução do nosso grupo é mais difícil, porque a gente fez conta em conta de divisão, ela fez se era ímpar ou par", é inconsistente, pois a pesquisadora não utilizou a paridade de um número (par/ímpar) durante a articulação. Ela apenas ressaltou, durante a apresentação do grupo D, o comentário de um colega a respeito do critério de divisibilidade por 2, a saber: um número é divisível por 2 se for par. Por fim, o aluno A10 escreveu uma justificativa muito ampla: "O jeito que a professora fez é mais fácil, já que ela fez parecer fácil".

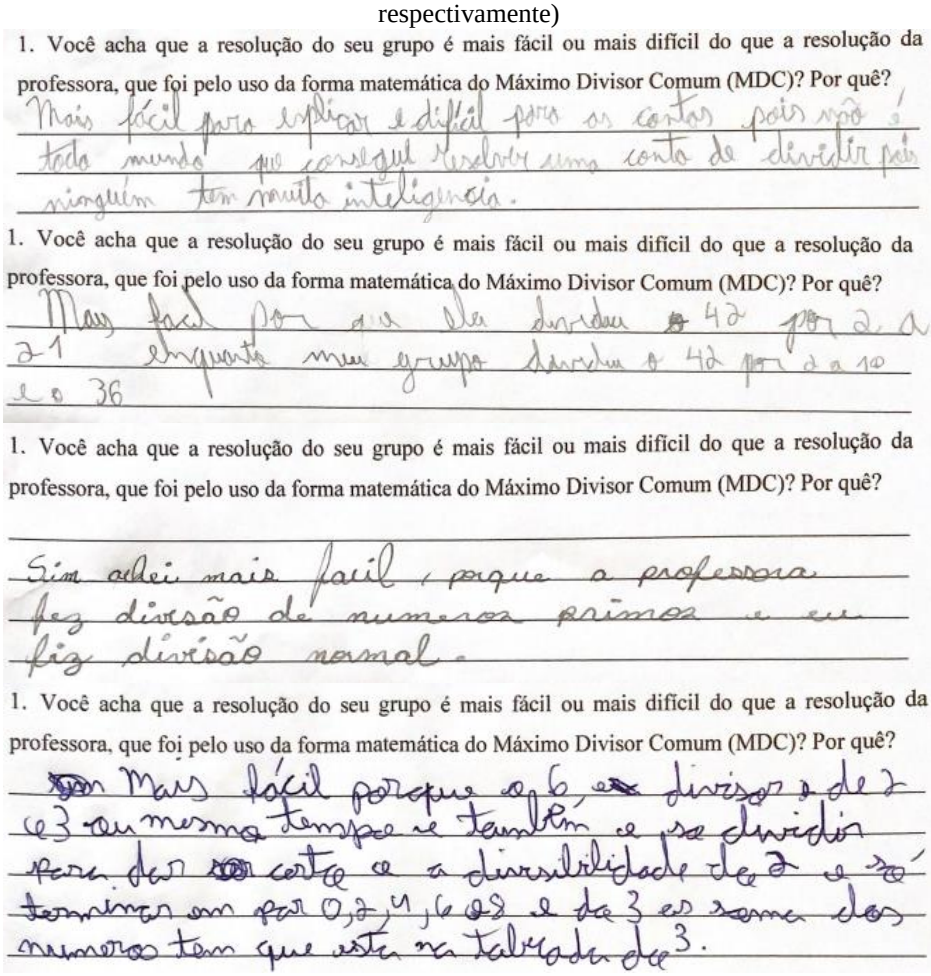
Em contrapartida, dezesseis respostas se encaixam na categoria *'Maior facilidade na estratégia do seu grupo'*. Em especial, um aluno (E1) argumentou que, apesar de considerar a estratégia utilizada por seu grupo mais fácil, essa facilidade está em explicar e não em realizar os cálculos, já que acredita que nem todos os colegas compreendem tais procedimentos. Essa argumentação está registrada na primeira imagem da Figura 24. Já a segunda imagem exemplifica as respostas dos alunos que justificaram sua preferência pela estratégia que seu grupo utilizou pelo fato de ter menos cálculos, sendo estes mais simples e fáceis. Isso foi mencionado pelos alunos A1, A3, C3, D1, E3, F1 e G2. Pelo fato de que, com exceção do grupo G, que assim como a pesquisadora, determinou todos os divisores de 42 e 36, os demais grupos testaram apenas algumas divisões, cujos divisores não ultrapassaram 10, consideramos que a impressão de que a professora realizou mais cálculos do que os alunos é coerente. No entanto, não podemos afirmar se é mais fácil ou não, pois isso depende do conhecimento procedimental de cada um.

O aluno F2 justificou em sua resposta que "[...] fazer divisão é mais simples que MDC", o que é uma justificativa válida se ele compreendeu que para determinar o MDC é preciso fazer divisões, mas não foi expressa de maneira clara. O aluno A2 mencionou (registrado na terceira resposta da Figura 24) que seu grupo fez 'divisão normal', o que embora seja inadequado, entendemos que se trata dos números naturais sem restrição e comentou também que a professora fez 'divisão de números primos', o que não ocorreu, pois como explicamos anteriormente, ela fez as divisões de 42 e de 36 por números compostos também, como o 6 por exemplo, além disso ela somente mencionou os números primos na ocasião em que os grupos C e D apresentaram a decomposição em fatores primos em suas estratégias de resolução, o que aconteceu momentos antes. Justificativa semelhante foi encontrada na resposta de A5: "[...] Porque ela fez por fatores primos e a gente fez divisão por números pares". Logo, por utilizar incorretamente as expressões e por utilizar termos matemáticos incorretos, consideramos que

estes alunos permaneceram com dificuldades nos *conhecimentos semânticos*, além disso, A5 permaneceu com a ideia errônea de que a estratégia de dividir 42 e 36 por números pares foi a que levou a solução, embora não tenha utilizado tal estratégia na lousa, no momento da apresentação de seu grupo.

Na resposta do aluno D2, fica clara sua impressão de que a estratégia utilizada pelo seu grupo é mais fácil. No entanto, ao invés de justificar o porquê, ele apenas explicou sua estratégia, como podemos observar na última resposta da Figura 24. As respostas de A5, B3, B4 e B5 também não são justificadas, visto que, na devida ordem, registraram: “Eu acho que a resolução do nosso grupo é mais fácil e a da professora eu achei mais difícil. Eu conversei com minhas colegas e achamos difícil, a gente conseguiu se entender” (grifos do aluno), “Mais fácil, porque deu resposta”, “O meu grupo foi mais fácil” e “O grupo foi mais fácil. Eu acho 1, 2, 3, 6 porque tem o mesmo que o 42, 36”. Assim, não temos condições de entender por que eles preferiram suas estratégias e não a da pesquisadora.

Figura 24 – Respostas que consideraram mais fácil a estratégia do grupo (dos alunos E1, F1, A2 e D2, respectivamente)


1. Você acha que a resolução do seu grupo é mais fácil ou mais difícil do que a resolução da professora, que foi pelo uso da forma matemática do Máximo Divisor Comum (MDC)? Por quê?

Mais fácil para explicar e difícil para as contas pois não é todo mundo que consegui resolver uma conta de dividir pois ninguém tem muita inteligencia.

1. Você acha que a resolução do seu grupo é mais fácil ou mais difícil do que a resolução da professora, que foi pelo uso da forma matemática do Máximo Divisor Comum (MDC)? Por quê?

Mais facil por que ela dividiu 42 por 2 a 21 enquanto meu grupo dividiu o 42 por 2 a 10 e o 36

1. Você acha que a resolução do seu grupo é mais fácil ou mais difícil do que a resolução da professora, que foi pelo uso da forma matemática do Máximo Divisor Comum (MDC)? Por quê?

Sim achei mais facil, porque a professora fez divisão de numeros primos e eu fiz divisão normal.

1. Você acha que a resolução do seu grupo é mais fácil ou mais difícil do que a resolução da professora, que foi pelo uso da forma matemática do Máximo Divisor Comum (MDC)? Por quê?

Mais fácil porque o 6, divisor de 2 e 3 ao mesmo tempo e também e se dividir para dar certo e a divisibilidade de 2 e só terminar com par 0, 2, 4, 6 e 8 e de 3 a soma dos numeros tem que estar na tabuada de 3.

Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Deste modo, temos que a maioria dos alunos (16 de 30) apontaram que a estratégia que seu grupo utilizou para resolver a situação de Matemática proposta a eles foi mais fácil do que a estratégia que a pesquisadora utilizou, que envolvia o uso da forma matemática do MDC. Resultados diferentes foram encontrados na pesquisa de Santos, Campelo e Proença (2023), em que foi proposto a alunos do 2° ano do Ensino Médio uma situação que envolvia a resolução de $0{,}76 = 0{,}89^h$ visando introduzir o conceito de logaritmo, de modo que 12 alunos (n=24) admitiram que a resolução apresentada pelos pesquisadores era mais fácil.

4.2.3 Compreensões dos alunos da relação entre as estratégias utilizadas e o conteúdo de MDC

Para analisar as compreensões dos alunos acerca da relação entre as estratégias utilizadas por eles e o conteúdo de MDC, foi proposto, após a articulação do conteúdo, a segunda questão do Questionário 2: “Explique-me como você pode relacionar a sua estratégia de resolução com o conteúdo de Máximo Divisor Comum”. As respostas foram separadas em cinco categorias, apresentadas na Tabela 4.

Tabela 4 – Entendimentos sobre a relação entre estratégia e o conteúdo

Categorias	**Alunos**	**Quantidade de alunos**
Compreendeu a relação (explicitamente com base na decomposição em fatores primos)	C3, F1	2
Compreendeu a relação (explicitamente com base na divisão)	A4, B2, F2	3
Compreendeu a relação (implicitamente com base na estratégia)	A2, A5, D2, D3, F3, G4	6
Não compreendeu a relação (inadequada)	A1, A3, B1, B3, B4, B5, C2, C4, D1, D4, E1, E3, E4, G1, G2, G3	16
Em branco	C1, E2, E5	3

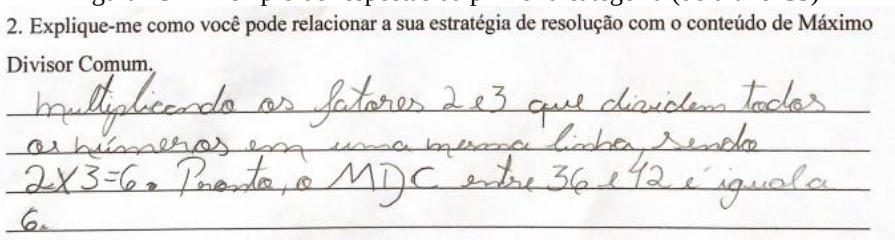
Fonte: Dados da pesquisa (2024)

A tabela acima mostra que três alunos deixaram de responder à questão. Os demais apresentaram respostas diferentes umas das outras, nas quais algumas explicaram a relação entre a estratégia utilizada e o conteúdo de MDC, enquanto outras não deixaram claro a compreensão dessa relação. Vejamos as respostas a seguir.

Na primeira categoria, estão as respostas dos alunos C3 e F1 (Figura 25), que compreenderam a relação existente entre o cálculo de MDC e a decomposição em fatores

primos, exatamente como planejado no Quadro 8 para a estratégia de decomposição em fatores primos - simultânea. O que nos chama a atenção é que, embora esses alunos fossem de grupos diferentes, eles escreveram a mesma redação, utilizando as mesmas palavras. Além disso, apenas um deles tentou, sem êxito, utilizar a decomposição em fatores primos, como explicado nas subseções anteriores. Logo, não compreendemos como eles chegaram a essa conclusão.

Figura 25 – Exemplo de respostas da primeira categoria (do aluno C3)

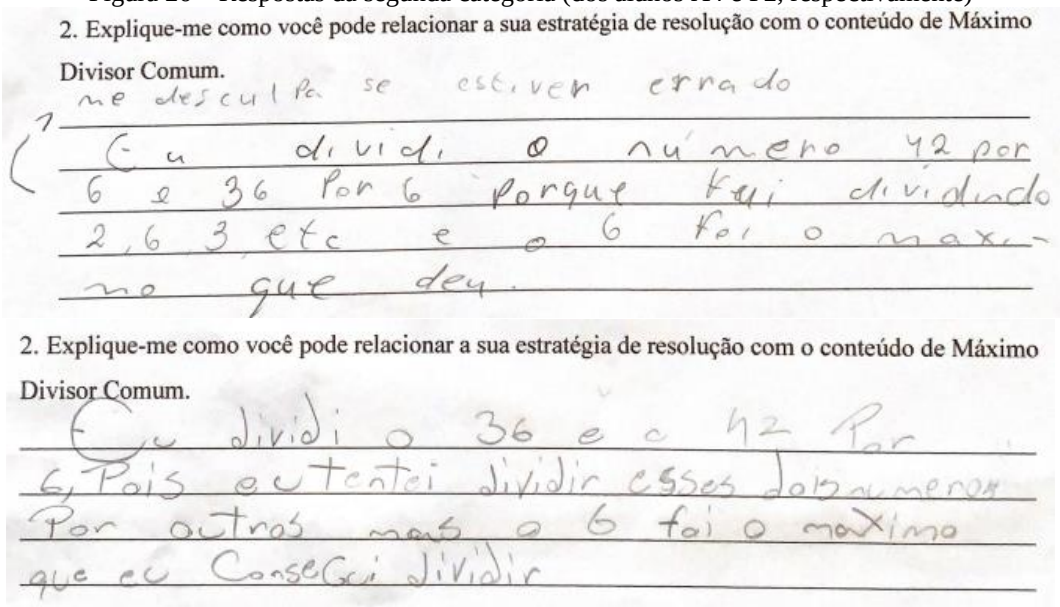

2. Explique-me como você pode relacionar a sua estratégia de resolução com o conteúdo de Máximo Divisor Comum.

multiplicando os fatores 2 e 3 que dividem todos os números em uma mesma linha, sendo 2X3=6. Pronto, o MDC entre 36 e 42 é igual a 6.

Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Na segunda categoria, estão as respostas dos alunos que compreenderam de maneira explícita que para calcular o MDC, assim como para executar sua estratégia, era preciso realizar cálculos envolvendo a divisão. Para exemplificar, a Figura 26 mostra as respostas dos alunos A4 e F2, respectivamente.

Figura 26 – Respostas da segunda categoria (dos alunos A4 e F2, respectivamente)


2. Explique-me como você pode relacionar a sua estratégia de resolução com o conteúdo de Máximo Divisor Comum.

me desculpa se estiver errado

Eu dividi o número 42 por 6 e 36 por 6 porque fui dividindo 2, 6 3 etc e o 6 foi o maximo que deu.

2. Explique-me como você pode relacionar a sua estratégia de resolução com o conteúdo de Máximo Divisor Comum.

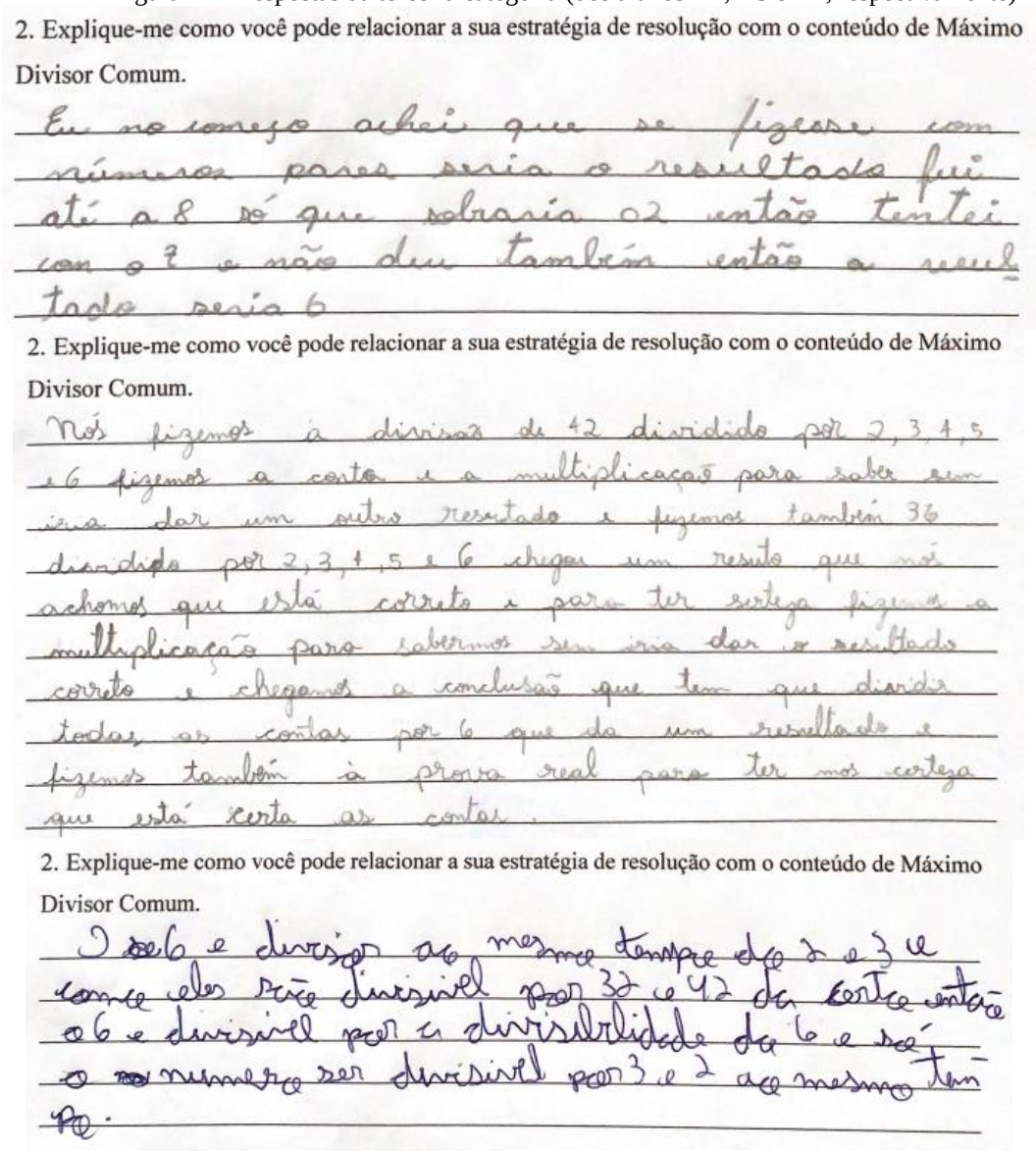
Eu dividi o 36 e o 42 por 6, pois eu tentei dividir esses dois numeros por outros mas o 6 foi o maximo que eu consegui dividir

Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Essas respostas da Figura 26 acima mostram que os alunos realizaram diversas divisões e que o número 6 foi o ‘máximo’ que conseguiram dividir, o que nos leva a induzir que eles compreenderam o termo ‘máximo’ como sendo o maior, assim como esperávamos.

Na terceira categoria, estão as respostas dos alunos que explicaram as estratégias utilizadas, deixando subentendido a compreensão da relação estabelecida entre a estratégia e o conteúdo de MDC, já que inferimos que eles compreenderam que precisavam encontrar o maior número que divide 42 e 36. No entanto, não escreveram isto de maneira explícita. A Figura 27 ilustra algumas das respostas desta categoria.

Figura 27 - Respostas da terceira categoria (dos alunos A2, A5 e D2, respectivamente)


2. Explique-me como você pode relacionar a sua estratégia de resolução com o conteúdo de Máximo Divisor Comum.

Eu no começo achei que se fizesse com números pares seria o resultado fui até o 8 só que sobraria 02 então tentei com o 7 e não deu também então o resultado seria 6

2. Explique-me como você pode relacionar a sua estratégia de resolução com o conteúdo de Máximo Divisor Comum.

Nós fizemos a divisão de 42 dividido por 2, 3, 4, 5 e 6 fizemos a conta e a multiplicação para saber sem iria dar um outro resultado e fizemos também 36 dividido por 2, 3, 4, 5 e 6 chegar um resulto que nós achamos que está correto e para ter certeza fizemos a multiplicação para sabermos sem iria dar o resultado correto e chegamos a conclusão que tem que dividir todas as contas por 6 que da um resultado e fizemos também à prova real para ter mos certeza que está certa as contas.

2. Explique-me como você pode relacionar a sua estratégia de resolução com o conteúdo de Máximo Divisor Comum.

O 6 e divisor ao mesmo tempo do 2 e 3 e como eles são divisível por 32 e 42 da certe então o 6 e divisível por a divisibilidade do 6 e será o numero ser divisível por 3 e 2 ao mesmo tempo.

Fonte: Dados da pesquisa (2024)

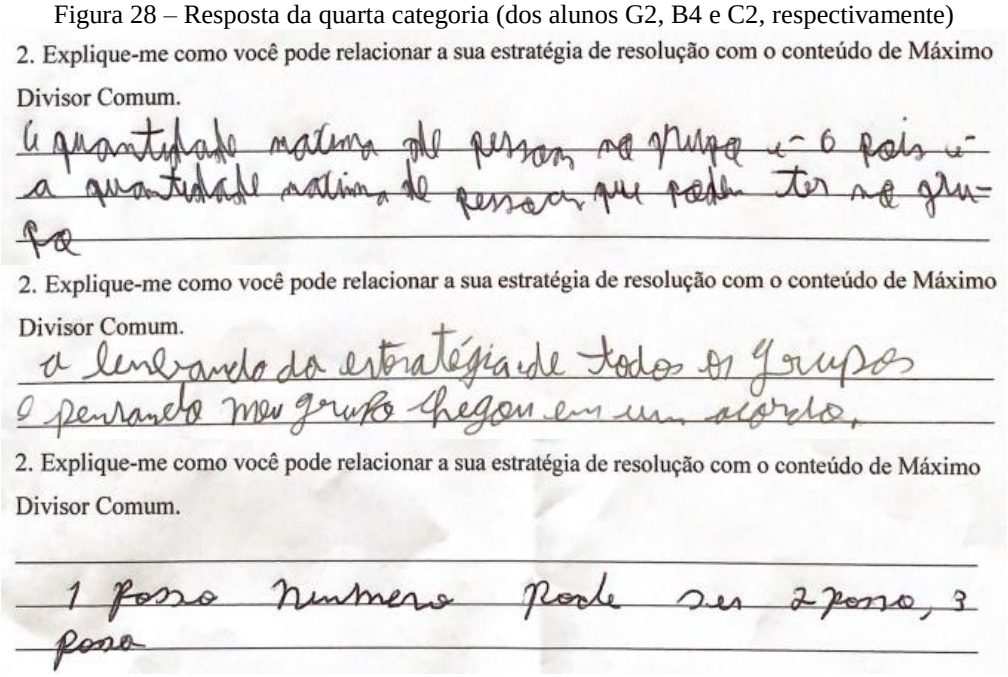
Na primeira resposta da Figura 27 acima, o aluno A2 explicou que, no início, sua estratégia foi dividir os números 36 e 42 por números pares, mas depois percebeu que isso não era preciso. Além disso, ele tentou dividir os números do enunciado por números maiores que 6, mas compreendeu que 6 era o maior número possível, visto que o resto da divisão não poderia

ser diferente de zero, pois, caso contrário, haveria alunos “sobrando”, isto é, sem grupos, o que já era esperado pela pesquisadora. A segunda resposta ilustrada deixa claro que a estratégia utilizada foi de tentativa e erro, já que o aluno A5 registrou que realizou diversas divisões e percebeu, de modo implícito, que entre os números que escolheu para dividir o 42 e o 36, o número 6 foi o maior. Em sua resposta, ele ressalta a importância de realizar a prova real para conferir o resultado. Isso é importante, pois, se feito corretamente, diminui consideravelmente as chances de encontrar um resultado errado, já que o ato de monitorar a resposta permite que o aluno corrija eventuais erros e/ou faça novos cálculos. Na terceira resposta, o aluno D2 explicou que os números 36 e 42 eram divisíveis por 2 e 3 e explicou o critério de divisibilidade por 6. Assim, ele encontrou os divisores comuns de 42 e 36, a saber: 2, 3 e 6, e percebeu que a resposta deveria ser a maior, conforme o enunciado. No entanto, ele se equivocou e escreveu que 6 era "divisor de" 2 e 3, ao invés de "divisível por", e que 2 e 3 eram "divisíveis por" 32 e 42, quando o correto seria "divisores de".

Logo, entendemos que esses alunos compreenderam a relação e esperávamos isso, mas gostaríamos que tivessem explicado com mais detalhes. Ou seja, as divisões que realizaram serviam para determinar os divisores dos números 42 e 36; ao compararem esses valores, estavam encontrando os divisores comuns e, por fim, ao determinar o maior deles, estavam encontrando exatamente o maior dentre os divisores comuns, ou seja, o MDC. Desse modo, enquadramos essas respostas na terceira categoria, pelo fato de compreenderem, de maneira implícita, o conceito de MDC, alinhado às definições encontradas nos livros didáticos (Quadro 5).

A quarta categoria corresponde às respostas que consideramos como inadequadas, pois além de não explicitar a estratégia de resolução utilizada, não demonstraram compreender a relação entre a estratégia e o MDC. A Figura 28 exemplifica respostas desta categoria.

Figura 28 – Resposta da quarta categoria (dos alunos G2, B4 e C2, respectivamente)


2. Explique-me como você pode relacionar a sua estratégia de resolução com o conteúdo de Máximo Divisor Comum.

a quantidade maxima de pessoas no grupo é 6 pois é a quantidade maxima de pessoas que pode ter no grupo

2. Explique-me como você pode relacionar a sua estratégia de resolução com o conteúdo de Máximo Divisor Comum.

a lembrando da estratégia de todos os grupos e pensando meu grupo chegou em um acordo.

2. Explique-me como você pode relacionar a sua estratégia de resolução com o conteúdo de Máximo Divisor Comum.

1 passo numero pode ser 2 passo, 3 passo

Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Dessas respostas acima, o aluno G2 apenas indicou o que escreveu na situação de Matemática, o aluno B4 apontou que seu grupo entrou em acordo para decidir a melhor estratégia e, por fim, não foi possível compreender o que o aluno C2 quis dizer.

Constatamos, portanto, que, dos 30 alunos que participaram da pesquisa, 19 não relacionaram a estratégia utilizada com o conteúdo, enquanto 11 compreenderam o conceito de MDC, explicitamente ou implicitamente. Provavelmente, isso se deve à dificuldade em entender a questão do questionário, que poderia ser minimizada se houvesse uma reescrita do enunciado, como, por exemplo, “Com base na sua estratégia, explique o que você entendeu por Máximo Divisor Comum”, pois acreditamos que a palavra "relacionar" não tenha sido totalmente compreendida. Além disso, outra possível causa é o fato de alguns alunos precisarem de mais tempo para assimilar o que foi trabalhado.

Comparando mais uma vez com a pesquisa de Santos, Campelo e Proença (2023), os resultados são divergentes, pois 15 alunos (n=24) do 2° ano do Ensino Médio compreenderam a relação existente entre logaritmos e potenciação/exponenciação.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, buscamos responder à seguinte questão de pesquisa: *Que compreensões de alunos de uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental são evidenciadas quando se trabalha o Ensino-Aprendizagem do Máximo Divisor Comum de números naturais via Resolução de Problemas?* Para isso, elencamos três objetivos específicos: Analisar as dificuldades dos alunos no processo de resolução do problema; Analisar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema; e Identificar as compreensões dos alunos sobre as estratégias de resolução e a forma matemática do MDC.

Assim, participaram de nosso estudo 30 alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, matriculados em uma escola pública do estado do Paraná, nos quais foram analisadas as resoluções de uma situação de Matemática, gravações de áudio das aulas, notas de aula e respostas de questionários.

Os dois primeiros objetivos — analisar as dificuldades dos alunos no processo de resolução do problema e analisar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema — foram atingidos por meio do eixo de análise *Dificuldades dos alunos no processo de resolução de problemas*. Nesse sentido, verificamos que os alunos tiveram dificuldade em todas as etapas do processo de resolução. Falaremos de cada uma a seguir.

Na etapa de *Representação*, três grupos demonstraram ter dificuldades nos conhecimentos linguísticos, já que não entenderam corretamente a expressão “mesmo número de integrantes”. Todos os grupos apresentaram maiores dificuldades nos conhecimentos semânticos, visto que desconhecem conceitos e termos envolvidos, como, por exemplo, “quantidade máxima”, e têm dificuldades na tradução da língua materna para a linguagem matemática, o que prejudica a compreensão da situação de Matemática, afetando as demais etapas.

Na etapa de *Planejamento*, com exceção de um grupo, os demais grupos demonstraram ter dificuldades nos conhecimentos estratégicos, pois, embora tenham elaborado uma estratégia inicial (média aritmética), esta era inadequada e apresentaram resistência em elaborar uma estratégia coerente, isto é, que levasse de fato à solução. Antes de seguirem a estratégia adequada, houve alguns inconvenientes, como a persistência em considerar apenas os números pares como divisores e a perseverança em citar e/ou utilizar a decomposição em fatores primos, mesmo sem relacioná-la com o cálculo do MDC. No entanto, com o auxílio da pesquisadora, eles apresentaram três estratégias coerentes, as quais nomeamos como tentativa e erro, lista de divisores e critérios de divisibilidade.

A estratégia de *tentativa e erro*, utilizada pelos grupos A, B, C e F, consiste em realizar diversas divisões, de modo a perceber que o número 6 é o maior número que divide 42 e 36 ao mesmo tempo. Esta estratégia foi prevista e se encontra no Quadro 8, na segunda linha. A estratégia *lista de divisores*, prevista na quarta linha do Quadro 8, foi utilizada pelos grupos E e G e envolve determinar os divisores de 42 e 36, em seguida os divisores comuns e, por fim, o maior deles. A estratégia *por critérios de divisibilidade*, não prevista e utilizada apenas pelo grupo D, implica em usar os critérios de divisibilidade para apontar os divisores comuns de 42 e 36 e, em seguida, indicar o maior deles. É provável que esta estratégia tenha sido usada pelo fato de que o conteúdo de critérios de divisibilidade foi trabalhado com os alunos pela professora regente em aulas anteriores à nossa implementação.

Na etapa de *Execução*, foi possível perceber a dificuldade dos grupos nos conhecimentos procedimentais. Em especial, notamos que essas dificuldades estavam nas operações de multiplicação e divisão, visto que, no algoritmo da divisão, eles determinaram de maneira incorreta o quociente. Também foi possível notar que os grupos B e E apresentaram dificuldades em realizar o cálculo da divisão quando o resto é diferente de zero.

Por fim, na etapa de *Monitoramento*, os grupos apresentaram dificuldades, pois, de maneira geral, demonstraram que não possuem o hábito de monitorar suas respostas e resoluções. No entanto, o grupo A avaliou se a resposta final era coerente com a situação de Matemática e os grupos D e F fizeram a revisão da resolução.

O terceiro objetivo específico — identificar as compreensões dos alunos sobre as estratégias de resolução e a forma matemática do MDC — foi atingido pelo eixo de análise *Compreensões dos alunos sobre o MDC de números naturais*. Neste caso, verificamos que os alunos tiveram dificuldades em organizar seus pensamentos em palavras, o que os levou a se expressar de maneira inadequada, porém perceberam que o ponto comum entre as estratégias utilizadas por eles envolvia a divisão, especificamente em determinar os divisores de 42 e 36, seja por meio do algoritmo da divisão, seja pelos critérios de divisibilidade. Analisamos também que 16 alunos (n=30) indicaram ter maior facilidade na estratégia utilizada pelo seu grupo, enquanto apenas 8 alunos compreenderam a relação existente entre as estratégias e o conteúdo matemático em questão.

De modo geral, nossas análises apontam que os alunos apresentam conhecimentos prévios malformados, possivelmente devido ao método de ensino tradicional, no qual eles apenas decoram as informações, sem, de fato, compreendê-las. Esse método não visa o desenvolvimento de diversas habilidades essenciais, como autonomia, compreensão, verificação da resposta e da resolução, entre outras. Assim, com a nossa pesquisa, cuja

implementação foi embasada na abordagem do EAMvRP, mostramos que 11 alunos (n=30) compreenderam o conteúdo matemático de MDC de números naturais, visto que entenderam que o termo “máximo” é sinônimo de maior e compreenderam a relação entre as estratégias e a ideia matemática do MDC (dos divisores que 42 e 36 têm em comum, o MDC é o maior deles). Por outro lado, os demais alunos necessitam de mais tempo para desenvolver completamente essa compreensão.

Isso não ocorreu com alunos de diferentes anos escolares do Ensino Fundamental e Ensino Médio de outras pesquisas, que apresentaram dificuldades em compreender o conteúdo de MDC (Arruda, 2016; Barbosa, 2017; Valentim, 2017; Fiorelli, 2018; Lustosa, Martins e Costa, 2018; Caldas, Graça e Marques, 2020). É provável que nosso estudo tenha apresentado resultados diferentes, pois essas pesquisas, com exceção de uma, não iniciaram o conteúdo com um possível problema, ou seja, utilizaram-no apenas como aplicação do conteúdo após a apresentação dos conceitos, enquanto nós utilizamos a situação de Matemática como ponto de partida. Além disso, mesmo que Valentim (2017) tenha explorado o conteúdo inicialmente com uma situação-problema, o autor focou em ensinar o processo prático para determinação do MDC, enquanto nós priorizamos a compreensão do conteúdo relacionando-o com o contexto da situação proposta, e não os procedimentos de cálculo.

Portanto, consideramos que a abordagem de ensino, implementada com base nas ações do EAMvRP, contribuiu para: a compreensão do conteúdo; a participação e comprometimento, visto que todos resolveram a situação de Matemática proposta; o trabalho coletivo e cooperativo, conforme sugere a BNCC; postura ativa e reflexiva dos alunos, pelo fato de estarem à frente do seu processo de aprendizagem e sempre se questionando — posturas essas possibilitadas pelo papel da pesquisadora como mediadora nas cinco ações do EAMvRP; no desenvolvimento da comunicação, visto que eles apresentaram suas resoluções na lousa, de modo a compartilhar suas estratégias com todos os colegas; e a percepção de que não há apenas uma maneira de resolver situações matemáticas.

No entanto, ficamos desgostosos com um grupo e um aluno de outro grupo que se mostraram desinteressados durante as aulas, embora tenham resolvido a situação de Matemática. Reconhecemos que os alunos apresentaram dificuldades durante o desenvolvimento desta pesquisa, nos fazendo refletir sobre as escolhas didático-metodológicas do professor, especialmente valorizando o contexto e a compreensão dos conteúdos matemáticos. Também salientamos que, se tivéssemos mais tempo para trabalhar com esses alunos em sala de aula, dedicando-nos ao desenvolvimento dos conhecimentos prévios (compreensão das operações de multiplicação e divisão, algoritmo da divisão, significado do

resto da divisão, conceitos de divisor, divisível, divisor comum e números primos), talvez os alunos tivessem compreendido mais facilmente o conteúdo em questão. Além disso, uma reescrita das questões dos questionários poderia facilitar o entendimento sobre o que queríamos saber, e a pesquisadora deveria ter debatido sobre as respostas dessas questões. Após o tempo determinado para os alunos responderem, ela apenas perguntou se alguém gostaria de ler a resposta espontaneamente, porém, se tivesse levado essa questão para ser debatida por todos, talvez os alunos que insistiram em utilizar a estratégia de divisão por números pares tivessem percebido o equívoco.

Como a situação de Matemática proposta foi utilizada apenas como introdução ao conteúdo de MDC, vemos a necessidade de abordar uma formação conceitual. Uma possibilidade é abordar as 4 etapas da proposta de organização de Proença (2021), a saber: Uso do problema como ponto de partida, Formação do conceito, Definição do conteúdo e Aplicação em novos problemas. Dessa forma, pretendemos dar continuidade a este estudo, implementando essa organização de ensino, para nos contrapor aos resultados de Santos e Silva (2021), que apontam que alguns professores têm a concepção de que os alunos não aprendem o conteúdo de MDC de forma profunda.

Por fim, acreditamos que nossa proposta de ensino promoveu contribuições que permitiram uma reflexão sobre as compreensões dos alunos sobre o conteúdo de MDC de números naturais por meio da resolução de problemas. Em particular, este estudo colaborou na formação da pesquisadora, pois ela teve a oportunidade de se debruçar sobre como os conteúdos matemáticos podem ser trabalhados em sala de aula a partir de um possível problema, como as pesquisas abordam o MDC de números naturais e como os alunos do 6º ano de uma escola pública paranaense compreendem esse conteúdo. Esperamos que este estudo colabore com a comunidade científica e com professores de Matemática, pois pode ajudá-los a ter base e a implementar a abordagem do EAMvRP para abordar conteúdos matemáticos.

.

REFERÊNCIAS

AKAMINE, C. S.; PROENCA, M. C. Ensino-aprendizagem de adição de frações via resolução de problemas. Tecné, Episteme y Didaxis: TED - **Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología**, v. 52, p. 303-322, 2022.

ALENCAR FILHO, E. **Teoria elementar dos números**. São Paulo: Nobel, 1981.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. de la R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? *In*: ONUCHIC, L. R. et al. (Orgs). **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. *E-book.* p.11.

ALVES, D. M.; CARNEIRO, R. dos S.; CARNEIRO, R. dos S. Gamificação no Ensino de Matemática: Uma proposta para o uso de jogos digitais nas aulas como motivadores da aprendizagem. **Revista Docência e Cibercultura**, [S. l.], v. 6, n. 3, p. 146–164, 2022.

AMARAL, F. C. do. **O ensino de Matemática**: uma abordagem do MDC com alunos surdos. 2019.89 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2019.

ANDRADE, E. A. B. ; GOMES, M. C. G.; MAFRA, J. R. e S. Análise do desempenho de alunos na resolução de problemas de múltiplos e divisores à luz da teoria de Vergnaud. **Revista Sítio Novo**, v. 5, n. 1, p. 85-99, 2020.

ANDRADE, T. M. **Jornadas**: Novos Caminhos - Matemática, 7° ano. 1. ed. São Paulo: Saraiva Educação S. A., 2022.

ARRUDA, A. M. **Aplicação do Lema de Euclides para Cálculo do Máximo Divisor Comum no Ensino Fundamental**. 2016. 53 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade de Brasília, Brasília, 2016.

BARBOSA, J. C. **Teoria dos números no ensino básico**: um estudo de caso no 2º ano do ensino médio. 2017. 118 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2017.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução: Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. Edição revista e ampliada. São Paulo: Edições 70, 2016. Título original: L'analyse de contenu.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**: 7° ano. 10. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

BICUDO, I. **Euclides**: Os Elementos. São Paulo: UNESP, 2009.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: SEF/MEC, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** - Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental - Matemática. Brasília: SEF/MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRITO, M. R. F. Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos. *In*: BRITO, M. R. F. (Org.). 2. ed. **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas: Alínea, 2006, p. 13-53.

CALDAS, F. da S.; GRACA, V. V. da; MARQUES, V. R. MÚLTIPLOS E DIVISORES: uma experiência com o uso do jogo de trilhas. **Revista Exitus**, Santarém, v. 10, p. 01-28, e020109, 2020.

CARRIJO NETO, L. A. **A pesquisa de aula (lesson study) no aperfeiçoamento da aprendizagem em matemática no 6° ano segundo o currículo do estado de São Paulo**. 2013. 165 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

CHAGAS, E. M. P. de F. Educação matemática na sala de aula: problemáticas e possíveis soluções. **Millenium** (Viseu), v. 29, p. 240-248, 2004.

CHARLES, R. I. The role of problem solving. **Arithmetic Teacher**, Reston, v.32, no. 6, p. 48-50, 1985.

CHI, M. T. H.; GLASER, R.; REES, E. Expertise in problem solving. *In*: STERNBERG, R. J. (Ed.). **Advances in the psychology of expertise**. Hillsdale: Erlbaum, v. 1, 1982, p. 7-76.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 2005.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Teláris Essencial**: Matemática - 7° ano. 1. ed. São Paulo: Ática, 2022.

ECHEVERRÍA, M. Del P. P. A solução de problemas em matemática. *In*: POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, p. 43-65, 1998.

ECHEVERRÍA, M. Del P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, p. 13-42, 1998.

FARIA, A. A. C. de. **Teoria dos números**: uma introdução motivadora direcionada aos docentes do Ensino básico. 2015. 178 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2015.

FELMER, P. Collaborative problem-solving in mathematics. **Current Opinion in Behavioral Sciences**, v. 52, p. 101296, 2023.

FI, C. D.; DEGNER, K. M. Teaching through problem solving. **Mathematics Teacher**, v. 105, n. 6, p. 455-459, 2012.

FIORELLI, J. de O. **Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum generalizados aplicados no ensino básico**. 2017. 72 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2017.

FRANÇA, J. de M.; SANTOS, I. B. dos. Resolução de Problemas nos Anos Finais do Ensino Fundamental: um exame nos Guias do PNLD (2002 e 2020). **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, *[S. l.]*, v. 13, n. 4, p. 1–16, 2022.

FREITAS, T. dos S.; CARDOSO, T. M. R. F. L. Entre Caminhos da Educação Matemática Brasileira: os Minicursos Sobre Resolução de Problemas nos Anais dos ENEMs. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, [S. l.], v. 16, n. 1, p. 134–142, 2023.

GARBI, G. G. **A rainha das ciências**. Editora Livraria da Física, 2010.

GASPI, S.; MARON, L. H. P. ; MAGALHÃES JUNIOR, C. A. de O. Análise de conteúdo numa perspectiva de Bardin. *In*: MAGALHÃES JÚNIOR, C. A. O.; BATISTA, M.C. **Metodologia da pesquisa em educação e ensino de ciências**. 2. ed. Ponta Grossa: Atena, 2023. p. 236-245.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. Editora Atlas SA, 2002.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A Conquista Matemática**: 7° ano, ensino fundamental - anos finais. 1. ed. São Paulo: FTD, 2022.

HEGARTY, M.; MAYER, R. E.; MONK, C. A. Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. **Journal of educational psychology**, v. 87, n. 1, p. 18, 1995.

HUANCA, R. R. H. **A Resolução de Problemas no processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e além da sala de aula**. 2006. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

HUANCA, R. R. H. Um olhar para sala de aula a partir da resolução de problemas e modelação matemática. *In*: Seminário de Resolução de Problemas, 1., 2008, Rio Claro. **Anais** [...] Rio Claro: GERP, 2008.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade**: 7° ano. 10. ed. São Paulo: Saraiva Educação S.A., 2022.

KLIEMANN, G. L. **Potencialidades e limitações de material didático para explorar resolução de problemas matemáticos**. 2015. 142 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Exatas) – Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, 2015.

KRULIK, S.; RUDNICK, J. A. Teaching problem solving to preservice teachers. **Arithmetic Teacher**, Reston, v.29, no. 6, p. 42-45, 1982.

KRUTETSKII, V. A. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren**. Tradução de Joan Teller. Chicago: University of Chicago Press, 1976.

LARA, C. P. B. **Uma Proposta de Ensino dos Números Inteiros Baseada na Resolução de Problemas**. 2021 112 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2021.

LEMOS JUNIOR, L. C. **O estudo do mdc e mmc por meio de atividades com material concreto, jogos e a "plataforma" Arduino**. 2019. 73 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2019.

LESTER JUNIOR, F. K. Trends and issues in mathematical problem-solving research. *In*: LESH, R; LANDAU, M. (Eds.) **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, p. 229-261, 1983.

LINS, R. M. O modelo dos campos semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: ANGELO, C. L. et al. (Org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**: 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012, v. 1, p. 10-20.

LUDKE, M.; ANDRE, M. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

LUSTOSA, J. I. S.; MARTINS, O. H.; COSTA, F. D. da. Intervenção pedagógica no ensino de matemática numa perspectiva de construção de habilidades e competências. **Revista Práxis: saberes da extensão,** [S.l.], v. 5, n. 10, p. 22-27, jan. 2018.

LUZ, J. A. da. **Contribuições de uma proposta de ensino por meio da Resolução de Problemas para a aprendizagem de Sistemas Lineares no Ensino Médio**. 263 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2023.

MAIA, E. J. **Conhecimentos de estudantes de pedagogia sobre a resolução de problemas geométricos**. 2016. 161 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2016.

MARCHANT, P.; CORNEJO, C.; FELMER, P. Student Insights in Mathematics Problem Solving: Cognition, Affect, and Gesture. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 21, n. 3, p. 713-736, 2023.

MARCONI, M. de A; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5.ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MARTINEZ, S.; VALVERDE, J. C. Influence of Context on Greatest Common Divisor Problem Solving: A Qualitative Study. **Mathematics**, v. 10, n. 8, p. 1325, 2022.

MATOS, J. da S. **Aritmética e aplicações**. 2017. 59 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2017.

MATSUDA, F. F. de S. **Um ensino de equação de 1° grau com uma incógnita via resolução de problemas**. 2017. 131 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2017.

MATSUO, F. H. R.; OLIVEIRA, A. B.; PROENÇA, M. C. Ensino de Máximo Divisor Comum em pesquisas brasileiras: um mapeamento de teses e dissertações. *In*: VIII Ágora Matemática, 2024, Campo Mourão. **Anais** […], Campo Mourão: UNESPAR, v. 8. p. 161–172, 2024.

MAYER, R. E. **Thinking, problem solving, cognition**. 2. ed. New York: WH Freeman and Company, 1992.

MENDES, L. O. R.; PEREIRA, A. L. Revisão sistemática na área de Ensino e Educação Matemática: análise do processo e proposição de etapas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 3, p. 196-228, 2020.

MENEGHELLI, J.; CARDOZO, D.; POSSAMAI, J. P.; SILVA, V. C. da. Metodologia de resolução de problemas: concepções e estratégias de ensino. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Blumenau, v. 11, n. 3, p. 211-231, 18 dez. 2018. Universidade Tecnologica Federal do Parana (UTFPR).

MORAIS, R. S.; ONUCHIC, L. R. Uma abordagem histórica da resolução de problemas. *In*: ONUCHIC, L. R. et al. (Orgs). **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. *E-book*. p. 10.

NUNES, R. da S. **Números primos e a constituição do MMC e MDC**. 2017. 114 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.

OLIVEIRA, A. B.; PROENÇA, M. C. O Ensino de Matemática Financeira via Resolução de Problemas: uma experiência no ensino médio. *In*: IV Ágora Matemática, 2020, Campo Mourão. **Anais** [...], Campo Mourão: UNESPAR, v. 4. p. 33-42, 2020.

ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, p. 199-218, 1999.

PARANÁ. Secretaria do Estado de Educação. **Referencial Curricular do Paraná**: princípios, direitos e orientações. Curitiba: SEED, 2018.

PARANÁ. Secretaria do Estado de Educação. **CREP – currículo da rede estadual paranaense**: Matemática. Curitiba: SEED, 2021.

PEREIRA, F. F.; DONEZE, I. S.; PROENÇA, M. C. Conhecimentos mobilizados por alunos do 9º ano do ensino fundamental na resolução de um problema de regiões retangulares. **ACTIO: Docência em Ciências**, v. 8, n. 3, p. 1-22, 2023.

PEREIRA, F. F.; PROENÇA, M. C. Ensino-Aprendizagem de Equações de 2º grau via Resolução de Problemas: Uma experiência a partir de uma Trajetória Hipotética de

Aprendizagem. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 12, n. 28, p. 427–446, 2023.

PILETTI, Claudino. **Didática Geral**. 5.ed. São Paulo: Ática,1985.

PINTO, M. A. M. **MMC e MDC**: abordagem e resolução de problemas. 2015. 55 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2015.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: Um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POSAMENTIER, A. S.; KRULIK, S. **Problem solving in mathematics, grades 3-6**: powerful strategies to deepen understanding. Corwin Press, 2009.

PRIEBE, D. D. A. M. **Tópicos de aritmética para as séries finais do Ensino Fundamental**: Uma proposta focada na Resolução de Problemas. 2016. 74 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2016.

PROENÇA, M. C. **Resolução de Problemas:** encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em sala de aula. Maringá: Eduem, 2018.

PROENÇA, M. C. Resolução de Problemas: uma proposta de organização do ensino para a aprendizagem de conceitos matemáticos. **Revista de Educação Matemática**, [s. l.], v. 18, p. e021008, 2021.

PROENÇA, M. C.; CAMPELO, C. S. A.; SANTOS, R. R. Problem Solving in BNCC: reflections for its insertion in the curriculum and in Mathematics teaching at Elementary School. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, *[S. l.]*, v. 13, n. 6, p. 1–19, 2022.

PROENÇA, M. C.; MAIA-AFONSO, É. J. Resolução de Problemas: Análise de propostas de ensino em dissertações de Mestrado Profissional. **Revista Paranaense de Educação Matemática,** [S. l.], v. 9, n. 18, p. 180–201, 2020.

PRUNER, M.; LILJEDAHL, P. Collaborative problem solving in a choice-affluent environment. **ZDM–Mathematics Education**, v. 53, p. 753-770, 2021.

QUINTILIANO, L. de C. **Relações entre os estilos cognitivos, as estratégias de solução e o desempenho dos estudantes na solução de problemas aritméticos e algébricos**. 2011. 222 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.

RODRIGUES, E. A. N.; OLIVEIRA, R. G. de; CALDERONI, C. N. Resolução de problemas para ensino e aprendizagem de matemática. *In*: BARBOSA, G. A. da S.; SOUZA, M. L. de (org.). **Contribuições metodológicas para a prática docente**: teorias e reflexões sobre o ensino e a aprendizagem na educação básica. Curitiba: CRV, 2018. p. 105-128.

RODRIGUES, F. R. S. **Teoria dos Números**: Um estudo de resolução de problemas da OCM do nível 3. 2020. 75 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza. 2020.

ROZARIO, T. A.; OLIVEIRA, A. B.; PROENÇA, M. C. Equação de 1.º grau via Resolução de Problemas: Uma experiência no ensino remoto emergencial. **Anais** da VII Escola de Inverno de Educação Matemática (EIEMAT) e I Escola de Inverno de Ensino de Física (IEIEF), Campus Santa Maria (SC), v. 5. n. 2.1, p. 907-916, 2021.

ROZARIO, T. A. **Ensino-Aprendizagem de Área de Triângulo via Resolução de Problemas**: análise sob o enfoque do modelo dos campos semânticos. 2022. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação Para a Ciência e o Ensino de Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2022.

ROZARIO, T. A.; SILVA, R. M. da; PROENÇA, M. C. Estratégias de alunos do 7º ano na resolução de um problema de subtração de frações no contexto do EAMvRP. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 12, n. 28, p. 515–532, 2023.

SANTOS, A. L. dos; SILVA, A. K. M. da. O processo de ensino de MMC e MDC realizado nas escolas públicas do Pará. *In*: 11° Seminário de Cognição e Educação Matemática (SCEM), 2021, Belém. **Anais** [...], Belém: UEPA, p. 26-40, 2021.

SANTOS, R. R. dos; CAMPELO, C. da S. A.; PROENÇA, M. C. O ensino de logaritmos via resolução de problemas no ensino médio. **ACTIO: Docência em Ciências**, v. 8, n. 3, p. 1-22, 2023.

SANTOS, Z. A. dos. **A teoria dos números na perspectiva da OBMEP**. 2020. 117 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2020.

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical problem solving**. Orlando: Academic Press, 1985.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JUNIOR, F. K. Developing understanding in maathematics via problem solving. *In*: Trafton, P. R.; Shulte, A. P. (Org.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, p. 31-42, 1989.

SILVA FILHO, D. S. da. **Teoria dos Números**: praticando a resolução de problemas Olímpicos. 2018. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2018.

SILVA, A. L. A. D. **Equações diofantinas lineares com n variáveis e aplicação em sala de aula utilizando o GeoGebra**. 2019. 61 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2019.

SILVA, N. U. da. **Introdução à Teoria dos números**: uma nova proposta para Educação básica. 2019. 54 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019.

SILVA, V. B. L. da. **Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum**: Proposta de Sequência Didática baseada na Resolução de Problemas. 2019. 53 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2019.

SOUSA, A. C.; MATSUO, F. H. R.; OLIVEIRA, A. B.; PROENÇA, M. C. Uma experiência de Ensino-Aprendizagem de Matrizes via Resolução de problemas no ensino médio. *In*: Simpósio de Resolução de Problemas na Educação Matemática, 2., 2023, online. **Anais [...]**. Maringá: GERPEM, 2023.

SOUSA, A. C. de; PROENÇA, M. C. Uma proposta de ensino de equação de 1. º grau com uma incógnita via resolução de problemas. **Revista Prática Docente**, v. 4, n. 2, p. 431-451, 2019.

SOUSA, E. M. R. **Equações diofantinas lineares**: uma abordagem para o Ensino Médio utilizando jogo matemático. 2019. 80 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2019.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. *In*: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.) The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving. Reston: NCTM, 1990, p. 1-22.

STEFANI, A. **Os conhecimentos e as dificuldades de alunos do ensino fundamental na resolução de problemas de perímetro de área**. 2019. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2019.

STERNBERG, R. J. **Psicologia Cognitiva**. Tradução de Roberto Cataldo Costa. 4 ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

TEIXEIRA, L. A. **SuperAção**: Matemática - 7° ano. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

TOZONI-REIS, M. F. de C. **Metodologia da Pesquisa**. 2 ed. Curitiba: IESDE, 2009.

TRAVASSOS, W. B. **A aprendizagem de Inequação Polinomial de 1° grau de uma turma de 7° ano do Ensino Fundamental**: Análise no contexto de uma sequência didática via Resolução de Problemas. 2023. 281 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2023.

VALENTIM, E. S. **A divisibilidade no Ensino Fundamental**. 2017. 62 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017.

ZABALZA, M. A. **Diários de aula:** um instrumento de pesquisa e desenvolvimento profissional. Porto Alegre: ARTMED, 2004.

ANEXO 1 - PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: ENSINO-APRENDIZAGEM DE MÁXIMO DIVISOR COMUM DE NÚMEROS NATURAIS VIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Pesquisador: Marcelo Carlos de Proença

Área Temática:

Versão: 1

CAAE: 79510024.8.0000.0104

Instituição Proponente: CCE - Centro Ciências Exatas

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 6.880.590

Apresentação do Projeto:

A abordagem desta pesquisa é qualitativa e se caracteriza como uma pesquisa de campo. Será desenvolvida em uma escola pública do município de Maringá - PR, com 28 alunos de uma turma de sexto ano do ensino fundamental anos finais. Com a autorização destes participantes, serão avaliados o processo de ensino-aprendizagem sobre o conteúdo Máximo Divisor Comum, por meio das resoluções de uma situação de Matemática e das respostas de questionários.

A hipótese apresentada é que as compreensões de alunos de uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental são evidenciadas quando se aborda o Ensino-Aprendizagem do Máximo Divisor Comum de números naturais via Resolução de Problemas.

A análise dos dados, ocorrerá de acordo com a Análise de Conteúdo de Bardin, que é organizada por meio de três fases: pré-análise; exploração do material; tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

Como desfecho primário, espera-se que as atividades desenvolvidas durante a implementação desta pesquisa e a condução da professora em sala de aula, utilizando a abordagem de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP), contribuam para a aprendizagem do Máximo Divisor Comum (MDC), isto é, espera-se que os alunos do sexto ano do ensino fundamental participantes da pesquisa, compreendam o significado de MDC e não apenas memorizem uma maneira de calcular o MDC de dois ou mais números naturais, mas que entendam o processo e consigam aplicar os conhecimentos obtidos em problemas

Endereço: Av. Colombo, 5790, UEM-PPG, sala 4
Bairro: Jardim Universitário **CEP:** 87.020-900
UF: PR **Município:** MARINGA
Telefone: (44)3011-4597 **Fax:** (44)3011-4444 **E-mail:** copep@uem.br

matemáticos e de outras áreas. Além disso, espera-se que esta pesquisa contribua no processo de melhoria do ensino de matemática.

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo Primário:

Analisar as compreensões de alunos de uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental, quando se trabalha o Ensino- Aprendizagem do Máximo Divisor Comum de números naturais via Resolução de Problemas.

Objetivo Secundário:

Analisar as dificuldades dos alunos no processo de resolução do problema;

Analisar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema;

Identificar a compreensão dos alunos da articulação de suas estratégias e a forma matemática do Máximo Divisor Comum.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Riscos:

Sentir-se incomodado(a) e desconfortável para resolver um problema matemático na lousa;

Sentir-se desconfortável ao se envolver com outros participantes (riscos físicos, emocionais, psicológicos, culturais etc.).

No entanto, a pesquisadora fará o melhor possível para que tais eventos não ocorra, auxiliando e acolhendo os participantes e contará com a colaboração da professora regente. Além disso, será lembrado aos participantes sobre o sigilo dos dados.

Benefícios:

As atividades desenvolvidas nessa proposta de ensino via resolução de problemas e a maneira da professora conduzir a aula, poderão contribuir para a aprendizagem do conteúdo matemático estudado, assim como propiciar o engajamento, autonomia, raciocínio, criticidade e criatividade.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

A pesquisa prevê a aplicação de dois questionários:

O primeiro com a questão discursiva: "O que você percebe em comum entre essas estratégias (caminhos) que vocês apresentaram na lousa?"

O segundo com as questões discursivas: "1. Você acha que a resolução do seu grupo é mais fácil ou mais difícil do que a resolução da professora, que foi pelo uso da forma matemática do Máximo Divisor Comum (MDC)? Por quê? e "2. Explique-me como você pode relacionar a sua

estratégia de resolução com o conteúdo de Máximo Divisor Comum."

O cronograma apresentado prevê início da coleta de dados em 25/07/2024 e envio do relatório final para COPEP/UEM até 01/10/2024.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Apresentou folha de rosto devidamente assinada pela Profª. Drª. Lilian Akemi Sato, diretora do Centro de Ciências Exatas (CCE);

Apresentou autorização do Colégio Cívico-Militar Ipiranga - EFM de Maringá, assinada pelo diretor Fernando Cesar Fernandes;

Apresentou termo de concordância Núcleo Regional de Educação (NRE) de Maringá, assinado por sua chefe Isabel Cristina Domingues Soares Lopes;

Apresentou TCLE dirigido aos pais/responsáveis e TALE dirigido aos alunos, em página única, na forma de convite, com breve discrição da pesquisa, das atividades, dos possíveis riscos, dos benefícios, da confidencialidade, da destinação dos dados registrados, com o endereço, telefone e e-mail do pesquisador, do pesquisador assistente e do Comitê Permanente de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos da UEM (COPEP) da UEM.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

De acordo com a análise realizada e as informações constantes nos arquivos anexados, baseado na legislação vigente, esse Comitê Permanente de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da Universidade Estadual de Maringá se manifesta pela aprovação do projeto de pesquisa em tela. Reitera-se a necessidade de apresentação de relatório final no prazo de 30 dias após o término do projeto.

Considerações Finais a critério do CEP:

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_2317466.pdf	02/05/2024 10:09:45		Aceito
Outros	autorizacaoescola.pdf	08/04/2024 13:38:43	Marcelo Carlos de Proença	Aceito
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_2317466.pdf	05/04/2024 17:07:04		Aceito
Outros	ConcordanciaNRE.pdf	05/04/2024 17:06:03	FLAVIA HISAYO RIBEIRO MATSUO	Aceito
Outros	SequenciaDidatica.pdf	05/04/2024	FLAVIA HISAYO	Aceito

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

Continuação do Parecer: 6.880.590

Outros	SequenciaDidatica.pdf	17:05:35	RIBEIRO MATSUO	Aceito
Outros	Situacaomatematica.pdf	05/04/2024 17:05:17	FLAVIA HISAYO RIBEIRO MATSUO	Aceito
Outros	Questionario2.pdf	05/04/2024 17:04:56	FLAVIA HISAYO RIBEIRO MATSUO	Aceito
Outros	Questionario1.pdf	05/04/2024 17:04:30	FLAVIA HISAYO RIBEIRO MATSUO	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE.pdf	05/04/2024 17:04:00	FLAVIA HISAYO RIBEIRO MATSUO	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TALE.pdf	05/04/2024 17:03:53	FLAVIA HISAYO RIBEIRO MATSUO	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Projeto.pdf	05/04/2024 17:03:42	FLAVIA HISAYO RIBEIRO MATSUO	Aceito
Folha de Rosto	Folhaderosto.pdf	05/04/2024 17:03:28	FLAVIA HISAYO RIBEIRO MATSUO	Aceito

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

MARINGA, 11 de Junho de 2024

Assinado por:
Maria Emília Grassi Busto Miguel
(Coordenador(a))

Endereço: Av. Colombo, 5790, UEM-PPG, sala 4
Bairro: Jardim Universitário **CEP:** 87.020-900
UF: PR **Município:** MARINGA
Telefone: (44)3011-4597 **Fax:** (44)3011-4444 **E-mail:** copep@uem.br

APÊNDICE A - TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Caro aluno(a), gostaríamos de convidá-lo(a) a participar da pesquisa de mestrado da pesquisadora assistente Flávia Hisayo Ribeiro Matsuo, portadora do RG xxxxxxxx-x. Sua participação é muito importante. O objetivo dessa pesquisa é *analisar as compreensões de alunos de uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental, quando se trabalha o Ensino-Aprendizagem do Máximo Divisor Comum de números naturais via Resolução de Problemas*.

Se optar por participar, você pode recusar participar da pesquisa a qualquer momento, qualquer que seja o motivo e não haverá prejuízo ou constrangimento. Lembramos também que você não terá custo financeiro algum.

Produção de dados: Os dados utilizados serão as resoluções dos problemas matemáticos, as respostas dos questionários e as gravações em áudio feitas em sala de aula para que a pesquisadora possa entender a sua maneira de pensar.

Possíveis riscos: Você pode escolher não responder quaisquer perguntas que o façam sentir-se incomodado(a) e desconfortável para resolver um problema matemático na lousa. Embora possa haver desconfortos, envolvendo contato com outros participantes (riscos físicos, emocionais, psicológicos, culturais etc.), informamos que a pesquisadora o ajudará. Além disso, a pesquisa será sempre acompanhada pela professora regente da disciplina.

Benefícios: As atividades desenvolvidas nessa proposta de ensino via resolução de problemas e a maneira de conduzir a aula, poderão contribuir para a aprendizagem do conteúdo matemático estudado, assim como propiciar o engajamento, autonomia, raciocínio, criticidade e criatividade.

Confidencialidade: Seu nome não aparecerá em lugar algum, assim como as gravações realizadas na sala e as resoluções feitas por você. Apenas a pesquisadora assistente, seu orientador (pesquisador responsável), Prof. Dr. Marcelo Carlos de Proença, e a professora regente terão acesso a esses dados.

Dúvida e reclamações: Você pode contatar a pesquisadora assistente Flávia Hisayo Ribeiro Matsuo a qualquer momento pelo telefone (xx) xxxxxxxxx ou pelo e-mail xxxxxxxxxxxx, residente na cidade de Maringá, na rua xxxxx, n° x, CEP xxxxx-xxx. Ou o pesquisador responsável dr. Marcelo Carlos de Proença, pelo e-mail xxxxxxxxx ou telefone (xx) xxxxxxxx, ramal xxx, na Universidade Estadual de Maringá - UEM, av. xxxxx, n° x, sala x, CEP xxxxxx, Maringá-PR. Ou ainda contatar o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos da UEM (COPEP) localizado na UEM, av. xxxxx, n° x, UEM-PPG, CEP xxxxxxx, Maringá-PR, cujo telefone é (xx) xxxxxxxx e o e-mail é xxxxxxxx.

Os dados produzidos nesta pesquisa poderão ser solicitados pelos participantes da pesquisa e/ou seus responsáveis, que serão guardados por cinco anos, sendo que após esse período serão descartados de maneira segura e apropriada. Além disso, o material elaborado com esses dados ficará armazenado no Repositório Institucional da UEM.

Por fim, solicitamos que você preencha os locais indicados abaixo com seu nome completo e assinatura. Atestamos a garantia de que você receberá uma via do Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE).

Eu,_____
(seu nome completo por extenso) declaro que fui devidamente esclarecido(a) e concordo em participar VOLUNTARIAMENTE da pesquisa.

_____ Data: __/___/____
Assinatura

Eu, Flávia Hisayo Ribeiro Matsuo (pesquisadora assistente) declaro que forneci todas as informações relevantes referentes ao projeto de pesquisa supracitado.

_____ Data: ___/___/____
Assinatura

APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Caríssimos pais/responsáveis, a pesquisadora assistente Profa. Flávia Hisayo Ribeiro Matsuo, portadora do RG xxxxxxxx-x, aluna do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da UEM, vem por meio deste convidá-lo a permitir que seu(sua) filho(a) participe da pesquisa de mestrado, que tem como objetivo *analisar as compreensões de alunos de uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental, quando se trabalha o Ensino-Aprendizagem do Máximo Divisor Comum de números naturais via Resolução de Problemas*.

Desse modo, a pesquisadora irá lecionar um conteúdo matemático com a presença da professora regente da disciplina. Informamos que a qualquer momento o(a) aluno(a) pode recusar participar da pesquisa, por qualquer motivo, sem que haja qualquer prejuízo/constrangimento. Lembramos também que os participantes da pesquisa não terão custo financeiro algum.

Produção de dados: Os dados utilizados serão as resoluções dos problemas matemáticos, as respostas dos questionários e as gravações em áudio feitas em sala de aula para capturar as discussões dos alunos acerca de como resolver os problemas, possíveis dúvidas, questionamentos, entre outras informações que contribuam na análise.

Possíveis riscos: O(A) aluno(a) tem a possibilidade de não resolver os problemas caso se sinta desconfortável/constrangido(a). Embora possa haver desconfortos, envolvendo contato com outros participantes (riscos físicos, emocionais, psicológicos, culturais, etc.), informamos que a pesquisadora estará atenta para proporcionar ajuda sobre qualquer risco/incômodo.

Benefícios: As atividades desenvolvidas e a maneira de conduzir a aula, poderão contribuir para a aprendizagem do conteúdo matemático estudado, assim como propiciar o engajamento, autonomia, raciocínio, criticidade e criatividade.

Confidencialidade: Os dados serão sigilosos, assim o nome do(a) aluno(a) não aparecerá em lugar algum na pesquisa, assim como as gravações realizadas na sala. Apenas a professora pesquisadora assistente, seu orientador (pesquisador responsável), prof. dr. Marcelo Carlos de Proença, e a professora regente terão acesso a esses dados.

Dúvida e reclamações: Contatar a pesquisadora assistente Flávia Hisayo Ribeiro Matsuo pelo telefone (xx) xxxxxxxx ou pelo e-mail xxxxxxxxxx residente em Maringá, na rua x, n° x, CEP xxxxxxxx. Ou o pesquisador responsável dr. Marcelo Carlos de Proença, pelo e-mail xxxxxxxxxxx ou telefone (xx) xxxxxxxx, ramal x, na Universidade Estadual de Maringá - UEM, av. xxxxxx, n° x, sala x, CEP xxxxxxxx, Maringá-PR. Ou ainda contatar o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos da UEM (COPEP) localizado na UEM, UEM-PPG, pelo telefone: (xx) xxxxxxxx e e-mail xxxxxxxxxxx.

Os dados produzidos nesta pesquisa serão guardados por cinco anos e poderão ser solicitados pelos participantes da pesquisa e/ou seus responsáveis. Além disso, o material elaborado com esses dados será armazenado no Repositório Institucional da UEM.

Por fim, solicitamos que você preencha, diante da leitura e entendimento dos esclarecimentos, os locais indicados abaixo. Atestamos a garantia de que você receberá uma via do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).

Eu,_____(nome por extenso), responsável pelo(a)_____(nome completo do(a) aluno(a)), declaro que fui devidamente esclarecido(a) e concordo em permiti-lo (la) a participar VOLUNTARIAMENTE da pesquisa.

_____Data: ___/___/____

Assinatura

Eu, Flávia Hisayo Ribeiro Matsuo (pesquisadora assistente) declaro que forneci todas as informações relevantes referentes ao projeto de pesquisa supracitado.

_____Data: ___/___/____

Assinatura

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO 1

	COLÉGIO ESTADUAL XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX **Aluno (a): _____ Nº _____Série: _____** **Componente Curricular: Matemática** **Data: _____/_____/2024** **Professor (a): Flávia Hisayo Ribeiro Matsuo** XXXXXXXXXXXXX

Questionário 1

O que você percebe em comum entre essas estratégias (caminhos) que vocês apresentaram na lousa?

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO 2

	COLÉGIO ESTADUAL XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX **Aluno (a): _____ Nº _____Série: _____** **Componente Curricular: Matemática** **Data: _____/_____/2024** **Professor (a): Flávia Hisayo Ribeiro Matsuo** XXXXXXXXXXXXX

Questionário 2

1. Você acha que a resolução do seu grupo é mais fácil ou mais difícil do que a resolução da professora, que foi pelo uso da forma matemática do Máximo Divisor Comum (MDC)? Por quê?

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

2. Explique-me como você pode relacionar a sua estratégia de resolução com o conteúdo de Máximo Divisor Comum.

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____