UEM
Universidade Estadual de Maringá

PCM
PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

JOÃO ALESSANDRO DA LUZ

CONTRIBUIÇÕES DE UMA PROPOSTA DE ENSINO POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA A APRENDIZAGEM DE SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO

MARINGÁ – PR

2023

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA

JOÃO ALESSANDRO DA LUZ

CONTRIBUIÇÕES DE UMA PROPOSTA DE ENSINO POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA A APRENDIZAGEM DE SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO

Maringá
2023

JOÃO ALESSANDRO DA LUZ

CONTRIBUIÇÕES DE UMA PROPOSTA DE ENSINO POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA A APRENDIZAGEM DE SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Dr. Marcelo Carlos de Proença

Maringá

2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

Luz, João Alessandro da

L979c Contribuições de uma proposta de ensino por meio da resolução de problemas para a aprendizagem de sistemas lineares no ensino médio / João Alessandro da Luz. -- Maringá, PR, 2023.

263 f.: il. color., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carlos de Proença.

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, 2023.

1. Ensino de matemática - Ensino médio - Dificuldades. 2. Resolução de problemas. 3. Sistemas lineares. 4. Abordagem de ensino. I. Proença, Marcelo Carlos de, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de

CDD 23.ed. 507

Elaine Cristina Soares Lira - CRB-9/1202

JOÃO ALESSANDRO DA LUZ

CONTRIBUIÇÕES DE UMA PROPOSTA DE ENSINO POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARAA APRENDIZAGEM DE SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em *Ensino de Ciências e Matemática.*

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Carlos de Proença
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola
Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho" – UNESP

Prof. Dr. Silvanio de Andrade
Universidade Estadual da Paraíba – UEPB

Profa. Dra. Mariana Moran
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Prof. Dr. Luciano Carvalhais Gomes
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Maringá, 07 de agosto de 2023.

Dedico esta tese a Deus por me guiar em toda essa trajetória, ao meu filho Nicollas Lorenzo e aos meus pais Valdivina e João, por todo carinho, amor, compreensão e apoio incondicionais durante a minha caminhada pessoal e profissional até aqui.

AGRADECIMENTOS

O processo para desenvolver uma tese foi um grande desafio para mim, vencê-lo, sem a ajuda de tantas pessoas, jamais seria possível. Gratidão é a palavra que resume meu sentimento para cada pessoa que tornou esse caminho mais fácil de ser trilhado. Por isso, deixo aqui meus agradecimentos a todos aqueles que auxiliaram para o sonho da escrita desta tese, tornar-se realidade

Ao Professor Doutor Marcelo Carlos de Proença, orientador, sempre amigo, dedicado e competente. Agradeço ao tempo dedicado à orientação e intervenção com excelência para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus tios Edimara Koerich e Rogério Koerich que sempre me apoiaram, seja financeiramente ou com palavras de incentivo desde a época da graduação.

A todos os professores do PCM da Universidade Estadual de Maringá, que com competência, inteligência e simpatia acolheram todos os doutorandos.

Ao GERPEM - Grupo de Estudos em Resolução de Problemas na Educação Matemática, pelo apoio por meio de discussões e contribuições realizadas durante os anos de doutorado que permitiram um melhor desenvolvimento dessa pesquisa.

A todos os colegas de curso, pela parceria nos períodos de estudos, apresentação de trabalhos, seminários e escrita de artigos, resenhas e textos acadêmicos.

Aos amigos e colegas de doutorado Luiz Mendes e Wiliam Travassos, pelas muitas horas de parceria com paciência, amizade, dicas de estudo e muitas risadas.

Às diretoras de minha escola, Consuelo Lucas e Vânia Sara Doneda pelo apoio e compreensão em vários momentos durante esse estudo de doutorado.

LUZ, João Alessandro da. **CONTRIBUIÇÕES DE UMA PROPOSTA DE ENSINO POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA A APRENDIZAGEM DE SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO.** 263 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá. Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carlos de Proença. Maringá, 2023.

RESUMO

Essa tese teve como objetivo analisar que contribuições a partir de uma organização de ensino por meio da resolução de problemas são identificadas na aprendizagem do conteúdo de sistemas lineares com estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Para tanto, esse trabalho trata-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa na modalidade de pesquisa pedagógica. Os participantes dessa investigação foram 34 alunos, sendo 12 do gênero masculino e 22 do gênero feminino do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública cujo professor-pesquisador é docente da disciplina de matemática. Para tanto foi implementada uma proposta de organização de ensino baseada nas quatro etapas (uso do problema como ponto de partida, formação do conceito, definição do conteúdo e aplicação em novos problemas) de Proença (2021) abarcando o conteúdo de Sistemas Lineares (SL). Os instrumentos e técnicas de registro empregados para coleta de dados foram: gravação de áudio, fotografias, registros dos alunos e notas de campo do professor pesquisador. Os procedimentos de análise de dados abarcaram a pesquisa qualitativa descritiva e interpretativa. Os eixos norteadores de análise foram os seguintes: Eixo 1 – Compreensão e desempenho dos alunos no uso do problema como ponto de partida para o ensino de SL; Eixo 2 - Compreensão e desempenho dos alunos relativos aos conceitos de SL; Eixo 3 - Compreensão e desempenho dos alunos no processo de ensino de definição do conteúdo de SL; Eixo 4 - Compreensão e desempenho dos alunos na resolução de novos problemas envolvendo SL; e Eixo 5 – Compreensão e desempenho dos alunos relativos ao conteúdo de SL por meio de avaliação escrita. Os resultados mostraram que a organização de ensino proposta permitiu o favorecimento do processo da aprendizagem, haja visto que os alunos investigados demonstraram compreensão conceitual de SL, e compreensão dos procedimentos algorítmicos de SL, tendo em vista também o uso destes conhecimentos na resolução de novos problemas relativos ao conteúdo de SL o que culminou em um processo que caminhou para a construção do pensamento algébrico. Entretanto, os participantes investigados tiveram dificuldades concentradas na etapa de execução e monitoramento durante a RP observadas nos eixos de análise 3, 4 e 5. Nesse sentido, a presente pesquisa trouxe contribuições em três vertentes, a saber: (a) no avanço do ensino de álgebra e do pensamento algébrico – referente à transição da aritmética para a álgebra e às demandas representar e raciocinar do pensamento algébrico; (b) na abordagem da RP durante o trabalho em sala de aula – por meio de um trabalho conceitual prévio a definição do conteúdo em um ambiente de aprendizagem significativa; e (c) nos apontamentos de dificuldades na aprendizagem de SL, ainda pouco reveladas pelas pesquisas – no caso de nosso estudo, essa dificuldades ocorreram no uso de conhecimentos procedimentais, relativo à etapa de execução de RP, na etapa de monitoramento da RP, e nas demandas raciocinar e resolver problemas do pensamento algébrico e que precisam ser melhor pesquisadas e reconstruídas. Contudo, esperamos que esse estudo sirva de respaldo para novas propostas de ensino de SL por meio da RP na Educação Matemática, valorizando a aprendizagem conceitual e procedimental dos alunos ao resolverem problemas e também para aprenderem a resolver problemas.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Sequência Didática. Abordagem de ensino. Sistemas Lineares.

ABSTRACT

This thesis aimed to analyze what contributions from a teaching organization through problem solving are identified in learning the content of linear systems with 2nd year high school students. Therefore, this work is a research with a qualitative approach in the form of pedagogical research. The participants in this investigation were 34 students, 12 male and 22 female, from the 2nd year of high school at a public school whose teacher-researcher teaches mathematics. To this end, a proposal for teaching organization was implemented based on the four stages (use of the problem as a starting point, formation of the concept, definition of the content and application to new problems) of Proença (2021) covering the content of Linear Systems (SL) . The instruments and recording techniques used for data collection were: audio recording, photographs, student records and field notes from the research professor. Data analysis procedures encompassed descriptive and interpretative qualitative research. The guiding axes of analysis were as follows: Axis 1 – Students' understanding and performance in using the problem as a starting point for teaching SL; Axis 2 - Students' understanding and performance regarding SL concepts; Axis 3 - Students' understanding and performance in the teaching process of defining SL content; Axis 4 - Students' understanding and performance in solving new problems involving SL; and Axis 5 – Students' understanding and performance related to SL content through written assessment. The results showed that the proposed teaching organization allowed the learning process to be favored, given that the students investigated demonstrated conceptual understanding of SL, and understanding of SL algorithmic procedures, also taking into account the use of this knowledge in solving new problems. relating to the content of SL, which culminated in a process that led to the construction of algebraic thinking. However, the investigated participants had difficulties concentrated in the execution and monitoring stage during the PR observed in analysis axes 3, 4 and 5. In this sense, the present research brought contributions in three aspects, namely: (a) in the advancement of teaching of algebra and algebraic thinking – referring to the transition from arithmetic to algebra and the representation and reasoning demands of algebraic thinking; (b) in the PR approach during classroom work – through conceptual work prior to defining the content in a meaningful learning environment; and (c) in the notes of difficulties in learning SL, still little revealed by research – in the case of our study, these difficulties occurred in the use of procedural knowledge, related to the PR execution stage, in the PR monitoring stage, and in the demands of reasoning and solving problems of algebraic thinking and which need to be better researched and reconstructed. However, we hope that this study will serve as support for new proposals for teaching SL through RP in Mathematics Education, valuing students' conceptual and procedural learning when solving problems and also learning to solve problems.

Keywords: Mathematics Teaching. Following teaching. Teaching approach. Linear systems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Processo de resolução de problemas matemáticos. 50
Figura 2 - Os passos do ciclo da solução de problemas. 53
Figura 3 - Estrutura da organização de ensino. 60
Figura 4 - Esquema de trabalho por meio da sequência de ações. 61
Figura 5 - Estratégia de desenho e tentativa e erro para resolver a situação 1. 84
Figura 6 - Estratégia de desenho e tentativa e erro para resolver a situação 2. 88
Figura 7 – Articulação ao conteúdo da situação 1 por meio da estratégia de desenho. 95
Figura 8 – Articulação ao conteúdo usando a estratégia de desenho para 97
Figura 9 – Resolução da situação 1 feita pela aluna A24. 137
Figura 10 - Lousa do professor ao articular a situação 1 ao conteúdo. 139
Figura 11 - Dificuldades das equipes 11 e 12 na resolução da situação 2.....140
Figura 12 - Dificuldades das equipes da resolução da atividade 4 - item b. 157
Figura 13 - Dificuldades das equipes da resolução da atividade 4 - item c.....158
Figura 14 - Consenso na lousa relativa à atividade 5. 161
Figura 15 - Dificuldades da etapa de execução na resolução da atividade 10-b. 174
Figura 16 - Dificuldades das equipes na atividade 11-b.....176
Figura 17 - Dificuldades das equipes na atividade 12. 177
Figura 18 – Dificuldades as equipes na resolução da atividade 16-e. 182
Figura 19 - Dificuldades da equipe 8 na resolução da atividade 17-b.....185
Figura 20 – Dificuldades da equipe 3 na atividade 18-c. 187
Figura 21 - Dificuldades da equipe 2 na resolução do item 19-a. 191
Figura 22 - Dificuldades da equipe 10 na resolução do item 19-b. 191
Figura 23 – Dificuldades de conhecimentos procedimentais das equipes na atividade 20-d. 194
Figura 24 – Dificuldades das equipes 2 e 6 na atividade 20-e. 195
Figura 25 - Dificuldades da equipe 15 na resolução do item 21-a. 202
Figura 26 – Dificuldades da equipe 3 na atividade 21-b. 204
Figura 27 – Dificuldades da equipe 10 na atividade 21-b. 205
Figura 28 - Dificuldades da equipe 2 na resolução do item 21-d. 210
Figura 29 – Dificuldades da equipe 15 na atividade 21-d. 210
Figura 30 - Dificuldades da equipe 9 na etapa de execução da atividade 21-e. 214

Figura 31 - Dificuldades da equipe 10 na etapa de monitoramento da atividade 21-e. 214
Figura 32 - Dificuldades da equipe 12 na atividade 22-b.....219
Figura 33 – Dificuldades da equipe 15 na atividade 22-b. 219
Figura 34 – Dificuldades das equipes na atividade 24-b. 224
Figura 35 - Dificuldades de execução da equipe 6 na atividade 24-c. 225
Figura 36 - Dificuldades da equipe 13 na atividade 24-c. 225
Figura 37 - Dificuldades da equipe 15 na atividade 24-c. 226
Figura 38 - Dificuldades de execução das equipes 1, 5 e 6 na atividade 24-d. 227
Figura 39 - Dificuldades na etapa de execução na atividade 24-e. 228

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Etapas de resolução de problemas. 56
Quadro 2 – Quadro síntese dos resultados obtidos na BDTD e na CTD. 68
Quadro 3 - Descrição das dissertações que oferecem propostas de ensino de SL por meio da RP 70
Quadro 4 - Descrição das dissertações que descrevem abordagens feitas em sala de aula..... 71
Quadro 5 – Cronograma das atividades a serem realizadas em sala de aula. 81
Quadro 6 - Folha de atividades entregue aos alunos. 83
Quadro 7 – Conhecimentos elencados durante a etapa de representação para 83
Quadro 8 - Etapas de resolução de problemas e conhecimentos elencados na estratégia de resolução por desenho e tentativa e erro da situação 1. 85
Quadro 9 - Etapas de resolução de problemas e conhecimentos elencados na estratégia de resolução por tabela da situação 1. 86
Quadro 10 – Estratégia de resolução algébrica da situação 1. 86
Quadro 11 - Etapas de resolução de problemas e conhecimentos elencados na estratégia de resolução algébrica da situação 1. 87
Quadro 12 – Conhecimentos elencados durante a etapa de representação para 88
Quadro 13 - Etapas de resolução de problemas e conhecimentos elencados na estratégia de resolução por desenho e tentativa e erro da situação 2. 89
Quadro 14 - Etapas de resolução de problemas e conhecimentos elencados na estratégia de resolução por tabela da situação 2. 90
Quadro 15 – Estratégia de resolução algébrica da situação 2. 92
Quadro 16 - Etapas de resolução de problemas e conhecimentos elencados na estratégia de resolução algébrica da situação 2. 92
Quadro 17 - Articulação ao conteúdo usando a estratégia de tabela para resolver a situação 1. 96
Quadro 18 - Articulação ao conteúdo usando a estratégia de tabela para resolver a situação 2. 98
Quadro 19 - Articulação ao conteúdo usando a estratégia de resolução algébrica para resolver a situação 2. 99
Quadro 20 – Proposta da atividade 1. 101
Quadro 21 - Proposta das atividades 2, 3 e 4. 102
Quadro 22 - Proposta das atividades 5 a 8. 104

Quadro 23 - Proposta da atividade 9. 106
Quadro 24 - Proposta das atividades 10, 11 e 12. 107
Quadro 25 - Proposta das atividades 13, 14 e 15. 108
Quadro 26 - Proposta da atividade 16. 110
Quadro 27 - Proposta da atividade 17. 112
Quadro 28 - Proposta da atividade 18. 112
Quadro 29 – Proposta dos exemplos 1, 2 e 3 e da atividade 19. 113
Quadro 30 - Proposta da atividade 20. 114
Quadro 31 – Proposta da atividade 21. 116
Quadro 32 - Proposta da atividade 22. 118
Quadro 33 - Proposta da atividade 23. 119
Quadro 34 - Proposta da atividade 24. 120
Quadro 35 – Síntese dos procedimentos de coleta de dados. 124
Quadro 36 - Aulas da organização de ensino implementadas. 125
Quadro 37 - Resumo dos procedimentos de análise dos dados da pesquisa. 128
Quadro 38 - Desempenho das equipes na resolução da situação 1. 135
Quadro 39 - Desempenho das equipes na resolução da situação 2. 140
Quadro 40 - Desempenho das equipes na resolução da atividade 2. 149
Quadro 41 – Justificativas das equipes na resolução da atividade 2. 151
Quadro 42 - Respostas apresentadas pelas equipes na atividade 3. 152
Quadro 43 – Desempenho das equipes na atividade 4. 155
Quadro 44 - Desempenho das equipes na resolução da atividade 5. 160
Quadro 45 - Desempenho das equipes na resolução da atividade 6. 163
Quadro 46 – Desempenho das equipes na atividade 7. 165
Quadro 47 - Dificuldades das equipes na atividade 9-d e 9-f. 171
Quadro 48 - Desempenho das equipes na resolução da atividade 10. 173
Quadro 49 - Desempenho das equipes na resolução da atividade 11. 175
Quadro 50 - Desempenho das equipes na resolução da atividade 12. 177
Quadro 51 - Desempenho das equipes na resolução nas atividades 13, 14 e 15. 179
Quadro 52 - Desempenho as equipes na resolução na atividade 16. 182
Quadro 53 - Desempenho das equipes na resolução na atividade 17-b. 184
Quadro 54 - Desempenho das equipes na resolução nas atividades 18-b e 18-c. 186
Quadro 55 – Desempenho e dificuldades das equipes na resolução na atividade 19. 189

Quadro 56 – Desempenho e dificuldades das equipes na resolução na atividade 20. 194
Quadro 57 - Desempenho das equipes na atividade 21-a.....201
Quadro 58 – Desempenho das equipes na atividade 21-b.....203
Quadro 59 - Desempenho das equipes na atividade 21-c.....206
Quadro 60 - Desempenho das equipes na atividade 21-d. 209
Quadro 61 - Desempenho das equipes na atividade 21-e.....213
Quadro 62 – Desempenho das equipes na atividade 22-a. 217
Quadro 63 - Dificuldades das equipes na atividade 22-a. 218
Quadro 64 - Dificuldades das equipes na atividade 22-d. 220
Quadro 65 - Desempenho das equipes na atividade 23. 221
Quadro 66 - Distribuição das equipes para a aula 18. 222
Quadro 67 - Dificuldades nas etapas de RP na atividade 24. 223

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Estratégia de resolução por tabela do problema da situação 2. 85
Tabela 2 - Estratégia de resolução por tabela do problema da situação 2. 90
Tabela 3 – Características apontadas pelas equipes na atividade 1. 145
Tabela 4 – Respostas das equipes na atividade 8. 168
Tabela 5 – Desempenho das equipes na resolução da atividade 24. 223

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

BDTD – Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

EAMvRP – Ensino e Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas

EF – Ensino Fundamental

EL – Equação Linear

ELs – Equações Lineares

EM – Ensino Médio

IBCT – Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

MA – Método da Adição

MS – Método da Substituição

ME – Método do Escalonamento

PCNS – Parâmetros Curriculares Nacionais

PISA – Programa Internacional de Avaliação de Alunos

PP – Proposição de Problemas

PUC-SP – Pontifícia e Universidade Católica de São Paulo

RP – Resolução de Problemas

SL – Sistema Linear

SLs -Sistemas Lineares

SPD – Sistema Possível e Determinado

SPI – Sistema Possível e Indeterminado

SI – Sistema Impossível

TCLE - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TALE – Termo de Assentimento Livre e Esclarecido

TC – Teorema de Cramer

UEL – Universidade Estadual de Londrina

UEPB – Universidade Estadual da Paraíba

UFPI – Universidade Estadual do Piauí

UFSCar – Universidade Federal de São Carlos - SP

UNESP – Universidade Estadual Paulista

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO **20**
INTRODUÇÃO **23**
1. A ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA **29**
1.1 PCN e BNCC – O ensino de álgebra em documentos oficiais **29**
1.2 Perspectivas do ensino de álgebra e o pensamento algébrico **31**
1.2.1 Alguns estudos sobre dificuldades e horizontes para o ensino de álgebra e para a construção do pensamento algébrico 34
1. 3 O ensino de álgebra na educação básica brasileira **40**
1.4 Estudos sobre perspectivas de ensino e aprendizagem de sistemas lineares **42**
2. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS **48**
2.1 Problema ou exercício? **48**
2.2 As etapas para se resolver um problema **49**
2.2.1 As fases de Polya 49
2.2.2 Os processos de resolução de Mayer 50
2.2.3 O ciclo da solução de problemas de Sternberg 52
2.2.4 O processo de resolução de problemas de Proença 54
2.2.5 Considerações acerca do processo de resolução de um problema 56
2. 3 A resolução de problemas para ensinar matemática **57**
2.4 Organizando o ensino de conceitos matemáticos por meio da resolução de problemas: a proposta de Proença (2021) **60**
2.4.1 Uso do problema como ponto de partida 61
2.4.2 Formação do conceito 63
2.4.3 Definição do conteúdo 65
2.4.4 Aplicação em novos problemas 66
2.5 Ensino de sistemas lineares por meio da resolução de problemas: um panorama de teses e dissertações **67**
2.5.1 Dissertações com propostas de ensino de sistemas lineares por meio da resolução de problemas 69
2.5.2 Dissertações com abordagens de ensino de sistemas lineares por meio da resolução de problemas realizadas em sala de aula 71
2.5.3 Considerações acerca das dissertações encontradas 74
3. METODOLOGIA **76**
3.1 Natureza e modalidade da pesquisa **76**
3.2 Fases da pesquisa **78**
3.3 Conhecendo o campo e os participantes da pesquisa **79**
3.4 Proposta de organização de ensino por meio da resolução de problemas **80**
3.4.1 Uso do problema como ponto de partida 81

3.4.2 Formação do conceito 100
3.4.3 Definição do conteúdo 106
3.4.4 Aplicação em novos problemas 115
3.5 Instrumentos e técnicas de coleta de dados 121
3.5.1 Gravação e transcrição dos áudios 121
3.5.2 Fotos da realização das atividades 122
3.5.3 Folha de atividades dos alunos 122
3.5.4 Notas de campo 123
3.6 Procedimentos de coletas de dados 124
3.7 Procedimentos de análise dos dados 126
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES 129
4.1 Eixo 1: análise da compreensão e desempenho dos alunos no uso do problema como ponto de partida para o ensino de SL 129
4.1.1 Análise das aulas 1 e 2 – usando o problema como ponto de partida 129
4.1.2 Análise das aulas 3 e 4 – discutindo as estratégias e articulando ao conteúdo 134
4.1.3 Observações acerca do desempenho dos alunos na etapa 1 143
4.2 Eixo 2: análise da compreensão e desempenho dos alunos relativos aos conceitos de SL 144
4.2.1 Análise da aula 5 – formando o conceito de EL 144
4.2.2 Análise da aula 6 – formando o conceito de SL 159
4.3 Eixo 3 – análise da compreensão e desempenho dos alunos no processo de ensino de definição do conteúdo de SL 169
4.3.1 Análise das aulas 7 e 8 – definindo EL, SL e suas soluções 169
4.3.2 Análise da aula 9 – classificação de um SL e método da adição 181
4.3.3 Análise das aulas 10 e 11 – teorema de Cramer na resolução de SL do tipo SPD. 184
4.3.4 Análise da aula 12 – definindo e resolvendo sistemas escalonados 189
4.3.5 Análise das aulas 13 e 14 – abordando o escalonamento de SL 192
4.4 Eixo 4 – Análise da compreensão e desempenho dos alunos na resolução de novos problemas envolvendo SL 197
4.4.1 Análise das aulas 15 e 16 – resolvendo novos problemas 197
4.5 Eixo 5 – Análise da compreensão e desempenho dos alunos relativos ao conteúdo de SL por meio de avaliação escrita 216
4.5.1 – Análise da aula 17 – avaliação dos conceitos aprendidos de SL 216
4.5.2 – Análise da aula 18 – avaliação na resolução de novos problemas 222
4.6 Reflexões acerca dos resultados encontrados e das contribuições da organização de ensino 230
CONCLUSÕES 233
REFERÊNCIAS 240

APÊNDICE A – TCLE - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 253
APÊNDICE B – TALE - TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 255
APÊNDICE C – MODELO DA NOTA DE CAMPO A SER UTILIZADA NAS AULAS DE ORGANIZAÇÃO DE ENSINO 258
APÊNDICE D – PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP 259

APRESENTAÇÃO

Atuo como professor de Matemática há quase 20 anos, tendo trabalhado tanto em escolas públicas quanto privadas, lecionando nos anos finais do EF, no EM, na Escola do Campo, Ensino Superior e na Pós-Graduação. Neste período, participei de cursos, eventos, palestras, semanas pedagógicas, sala de bate-papo virtuais (como o GTR – Grupo de Trabalho em Rede dos professores da Educação Básica do Estado do Paraná) nos quais estudamos e debatemos os novos rumos da Educação e, sobretudo da Educação Matemática.

De maneira geral, conversando com colegas professores que ministram também a disciplina de Matemática na escola, comecei a observar que muitos reclamam da falta de qualificação para usarem metodologias de ensino para abordar os diferentes conteúdos para seus alunos. Dificuldades essas que muitas vezes ocorrem, por falta de tempo e condições financeiras para se fazer uma qualificação profissional. Quadro também corroborado pelo medo do novo, pelo não conhecimento de novas e diversificadas abordagens de ensino e como usá-las de maneira adequada em sala de aula.

Conversando com os colegas verifiquei que a dificuldade estava principalmente em questões como: Em que momentos do processo de ensino e aprendizagem uma metodologia deveria ser implementada? Se seria antes, durante ou depois de aplicar definições de conceitos matemáticos; se seria antes, durante ou depois de uma avaliação dada aos alunos; quais metodologias seriam adequadas para determinados conteúdos?

Outrora, trocando ideias com professores de mesmas escolas nas quais trabalhava, vi que muitos estudam diferentes metodologias para serem usadas em suas aulas, mas não sabiam fazê-las de maneira adequada, segundo preconizavam os referenciais teóricos de cada uma delas. Ouvi de muitos também que defendiam o chamado método tradicional baseado principalmente do quadro de giz e livro didático, que não viam diferença na aprendizagem dos alunos se usassem diferentes metodologias. Pensei em seguida, em como contribuir para "prová-los do contrário" não só recorrendo a um vasto acervo científico sobre o assunto, mas também apresentando uma proposta prática vivenciada e experenciada por mim.

Em relação a vida acadêmica, me formei em Licenciatura em Matemática na UNESPAR - Universidade Estadual do Paraná e me apaixonei pela sala de aula desde a época de estágio. Algum tempo depois, em 2016 terminei o Profmat - mestrado profissional nacional em matemática pela UEM – Universidade Estadual de Maringá apresentando uma dissertação em

que apontava a usabilidade e aprendizagem do software GeoGebra no ensino de função afim com alunos do 1º ano do EM.

Em 2019, ao entrar para o doutorado tive contato com a abordagem de ensino via resolução de problemas por meio do trabalho do livro “Resolução de problemas: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de matemática em sala de aula” de autoria do meu orientador, o professor Dr. Marcelo Carlos de Proença. Foi um ano de muitos aprendizados, nos quais pude conhecer os pressupostos teóricos da resolução de problemas e entender sua implementação em sala de aula, o qual preza por utilizar o problema como ponto de partida e não a definição matemática.

Atualmente trabalhando 40 horas semanais com alunos dos anos finais do EF e do EM da rede pública de educação básica do Estado do Paraná, me vi rodeado por questionamentos de como usar a resolução de problemas nas minhas aulas. Após muitos estudos sobre o tema, a minha sala de aula tornou-se um campo fértil para minhas próprias pesquisas e aprimoramento da minha prática pedagógica.

Nesses quase 20 anos de magistério, um dos conteúdos matemáticos que mais tive dificuldades de lecionar foi o conteúdo de sistemas lineares – SL. Seja no Ensino Fundamental - EF, trabalhando com duas equações e duas incógnitas ou no Ensino Médio - EM ensinando SL 3x3, a maioria das minhas aulas desse conteúdo terminava em decepção enquanto professor. Sempre verifiquei que a maioria dos alunos deixavam em branco as questões de trabalhos avaliativos ou de avaliações descritivas que abarcavam SL. Muitos do que faziam, ou faziam a resolução errada ou parcialmente errada. Se eu colocasse uma situação problema, a maioria não sabia identificar que ali se tratava de um sistema linear e não sabia como transformá-la da linguagem materna para a linguagem matemática.

Quando tive a oportunidade de lecionar por 4 anos a disciplina de *Geometria Analítica e Álgebra Linear* para dois cursos de ensino superior – Engenharia Civil e Engenharia de Produção – de uma faculdade privada, verifiquei uma ampliação dessas dificuldades: A grande maioria dos alunos egressos do EM não sabia resolver um SL. Muitos não sabiam identificá-lo, seja na forma matemática pronta ou em uma situação matemática contextualizada apresentada.

Todo esse panorama vivenciado por mim, me levou a buscar durante o doutorado uma forma da resolução de problemas - RP ser minha parceira em sanar as minhas dificuldades para ensinar meus alunos no conteúdo de SL. Processo esse que facilitaria a aprendizagem dos estudantes seja nos anos finais do EF ou no EM, níveis escolares nos quais leciono.

Nesse panorama, cheguei a realizar as ações propostas por Proença (2018) para introdução do conteúdo de sistemas de equações do 1º grau com meus alunos de 8º ano do EF. Os resultados alcançados foram muito satisfatórios, mas ainda faltava o trabalho da RP no conteúdo de SL com os estudantes do EM.

Foi aí que em 2021, o professor Proença publicou o artigo “Resolução de Problemas: uma proposta de organização do ensino para a aprendizagem de conceitos matemáticos” – Proença (2021). A partir desse trabalho, surgiu a proposta de pesquisa dessa tese vindo ao encontro das minhas dificuldades profissionais, que através de buscas em referenciais teóricos pude verificar que também eram obstáculos apontados por diversos professores e autores teóricos acadêmicos.

Assim, essa tese busca contribuir com uma organização de ensino para aprendizagem de conceitos de matemática do conteúdo de SL por meio da resolução de problemas. A pesquisa foi realizada pelo professor e pesquisador em sala de aula com seus 34 alunos do 2º ano do EM de uma escola pública. Esperamos sobremaneira que essa pesquisa possa contribuir para o campo da Educação Matemática, pesquisadores, futuros pesquisadores e para os professores interessados em aprimorar sua prática pedagógica em relação ao tema abordado.

INTRODUÇÃO

O ensino de álgebra e a construção do pensamento algébrico são temas abordados em pesquisas no âmbito nacional e internacional. Em relação ao pensamento algébrico, Blanton e Kaput (2005) o apontam como um processo no qual os alunos fazem o desenvolvimento de generalizações de ideias matemáticas saindo de casos particulares, chegando a um discurso argumentativo e evoluindo para uma expressão formal que é apropriada a cada idade. Nesse sentido, Ponte, Branco e Matos (2009) apontam que o pensamento algébrico demanda três competências e habilidades dos estudantes na aprendizagem de álgebra: representar, raciocinar e resolver problemas e modelar situações. Ponte (2006) corrobora com esse panorama nos atentando que dessa forma, o pensamento algébrico deve ter cuidado não apenas com objetos, mas na relação que existe entre eles, carregando assim a representação e o raciocínio de maneira concreta e abstrata. Fechando essas ideias, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) apontavam que, à medida que ocorre o desenvolvimento do pensamento algébrico no aluno, acontece a evolução de sua capacidade de expressar problemas e situações matemáticas num processo que permitirá construir uma inter-relação entre a linguagem e o pensamento e não a uma subordinação desse processo.

Sobre a documentos oficiais brasileiros, inicialmente os PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) apontavam que a álgebra poderia ser ensinada por meio da resolução de problemas, de maneira que os estudantes reconhecessem suas diferentes funções e representações. Com o advento da BNCC – Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) – o ensino de álgebra passou a objetivar a ideia do pensamento algébrico para que o aluno venha a ter uma compreensão, representação e avaliação de problemas quantitativos de modo a representá-los para linguagem simbólica com o uso de letras.

Entretanto, quando nos deparamos com os apontamentos dos documentos oficiais e os teóricos do pensamento algébrico vemos uma realidade bem diferente nas escolas brasileiras. As últimas provas como a do Saeb 2019 (BRASIL, 2021) e a do Pisa 2018 (BRASIL, 2021) verificaram um baixo índice de proficiência em matemática dos estudantes brasileiros tanto do Ensino fundamental - EF quanto do Ensino Médio - EM, resultado que aponta para alunos que não conseguem resolver questões simples e rotineiras que envolvem álgebra. Kuhn e Lima (2021) sugerem que esses dados demonstram que os professores de matemática têm desenvolvido um trabalho fragmentado em relação ao ensino em sala de aula. Tal trabalho é

baseado em um ensino mecânico, sem interação com conhecimentos prévios e que não desenvolve no discente suas competências e habilidades relativas ao conhecimento algébrico.

Este panorama foi evidenciado por Borges (2018) ao analisar pesquisas de dissertações e teses que trouxeram à tona um ensino da álgebra embasado apenas em técnicas algébricas, com docentes presos a livros didáticos e sem um trabalho desse conteúdo de forma contextualizada e interdisciplinar. Um apontamento do autor que nos chama a atenção é que nenhum trabalho analisado por ele trata o que é ensinado aos estudantes como sendo álgebra, faltando assim um trabalho referente ao conceito desse conteúdo matemático.

Em se tratando mais especificamente do ensino de Sistemas Lineares - SL, tema de nosso estudo, tanto os PCNs como a BNCC enfatizam que seu ensino deve possibilitar ao aluno a competência de elaborar e resolver problemas do seu cotidiano, usando técnicas algébricas ou gráficas. Porém, as dificuldades que foram citadas acima em relação a álgebra se estendem ao conteúdo de SL. Ferreira (2013) aponta que o ensino de SL é feito de forma rápida e superficial. Segundo o autor, na abordagem de ensino desse conteúdo, ocorre uma preocupação muito grande com as manipulações algébricas, as quais são vistas de forma desorganizada e descontextualizada. Já Battaglioli (2008) e Catâneo e Rauen (2018) verificaram em suas pesquisas livros didáticos que abordavam SL tendo como prioridade o cálculo algébrico, que exploravam muito pouco a resolução e elaboração de situações problemas, interpretações gráficas e resoluções inversas. Por fim, Negromonte *et al.* (2009) e Valenzuela (2007) ao fazerem estudos com alunos de 7º ano e 8º ano do EF, respectivamente, observaram estudantes com dificuldades de compreensão, entendimento e até rejeição ao estudarem o conteúdo de SL.

Nesse panorama de ensino e aprendizagem de SL e visando o contorno dos entraves já elencados, Pontes (2021) apresenta um trabalho fundamentado em estratégias intuitivas por meio de tabelas de dados para SL com duas equações e duas incógnitas. Rodrigues, M. S. (2017) apresenta um trabalho com situações matemáticas do cotidiano para SL 3 por 3. Entretanto, esses dois autores não desenvolveram essas abordagens no ambiente de sala de aula. Ao contrário disso, Bezerra *et al.* (2013), Ferreira (2013), Fonseca (2017) e Pereira (2017) apresentaram trabalhos, cuja abordagem de SL foi realizada, em sala de aula, com problemas práticos, os quais eram resolvidos por meio da resolução gráfica em *softwares* como o GeoGebra e até mesmo usando princípios de programação computacional.

Dentro dessas possibilidades, Müller, Hetkowski e Pinheiro (2017) sugestionam abordagens de ensino promissoras como a resolução de problemas - RP. Nesse sentido, Schroeder e Lester Junior (1989) apontam três abordagens de como a RP estava sendo ensinada:

ensinar *sobre* RP, ensinar *para* RP e ensinar *via/através* da RP. A primeira diz respeito as quatro fases para se resolver um problema apontadas por Polya (1994): compreender o problema, estabelecer o plano de resolução, executar o plano e realizar o retrospecto. A segunda infere a aplicar o conteúdo matemático aprendido em exercícios e problemas. Por fim, a terceira aponta que o ensino de um conteúdo matemático deve começar com uma situação-problema que contenha aspectos chaves do conteúdo que se quer ensinar, sendo, assim, que o problema deve ser abordado como ponto de partida para aprendizagem do conteúdo matemático.

Diante disso, Schroeder e Lester Junior (1989, p. 34) discorrem que essa última abordagem de ensino *via/através* da RP "[...] é uma concepção que não tem sido adotada [...] por muitos professores, autores de livros e desenvolvedores de currículos, mas é uma abordagem do ensino de matemática que merece ser considerada, tentada e avaliada". Entretanto, o trabalho de Proença e Maia-Afonso (2020) verificou estudos que apontavam abordagens de ensino para a concepção *para* RP, nos quais os conceitos matemáticos eram ensinados de forma direta sem que ocorressem, de fato, a formação desses conceitos.

Diante desse panorama, em se tratando de pesquisas de teses e dissertações brasileiras sobre trabalhos que fizeram uso da RP para ensino e aprendizagem de SL, nossa busca, que será melhor detalhada mais adiante no decorrer desse trabalho na seção de revisão bibliográfica, apontou poucas pesquisas – num total de apenas sete dissertações - que abarcavam investigações nessa abordagem de ensino. Para melhor entendimento, dividimos as dissertações encontradas entre aquelas que ficaram apenas no âmbito da proposta e entre aquelas propostas nas quais foram feitas investigações práticas em sala de aula.

Entre as dissertações no campo apenas da apresentação de uma proposta de ensino, encontramos que Andrade (2013) apresenta uma proposta de ensino *via/através* da RP de SL para alunos de EM usando a tecnologia do *software* GeoGebra. Já Boccardo (2017) apresenta outra proposta com abordagem de ensino *sobre* e *para* RP a ser trabalhada com estudantes do EF e do EM. Verificamos, entretanto que nas duas dissertações supracitadas não existe a investigação das propostas em sala de aula, não sendo possível tecer conclusões sobre suas eficiências no contexto escolar.

Por outro lado, em um olhar em dissertações que tiveram investigações práticas feitas em sala de aula, vemos que Silva, J. A. (2019) apresentou uma proposta de ensino *via/através* da RP na qual analisou as representações múltiplas no processo de resolução de alunos do 8º ano do EF e apontou para a necessidade de melhorar o ensino de métodos algébricos para resolução de SL. Antoniassi (2013) expôs em seu trabalho uma abordagem de ensino *para* RP

na qual trouxe situações matemáticas com concepção de problemas que poderiam ser resolvidas graficamente por meio do GeoGebra, mas que não contemplavam o processo de resolução com técnicas algébricas. Goulart (2014) desenvolveu uma sequência didática embasada no ensino *via/através* da RP com seus alunos do 8º ano do EF na qual verificou a presença da aprendizagem significativa dos estudantes investigados. De outro modo, Miranda (2014) apresentou um ensino *para* RP com alunos de 7º ano do EF, que segundo o autor melhorou a aprendizagem dos estudantes. Por fim, Martins (2019) apresentou uma formação para licenciandos de matemática por meio da metodologia de exploração, resolução e proposição de problemas envolvendo SL. Nesta pesquisa, a autora apontou que se construiu uma nova postura para o ensino de SL dos licenciandos futuros professores.

Diante dos contextos de dificuldades de ensino de álgebra e sobretudo de SL que vimos serem apontadas acima por meio de provas governamentais (Saeb e Pisa) e trabalhos acadêmicos, encontramos dissertações que buscaram de diferentes formas melhorar esse quadro preocupante. Entre estas, nos chamaram a atenção o trabalho de Goulart (2014) com uma investigação da abordagem de ensino *via/através* da RP que por meio de uma sequência didática conseguiu contribuir para a aprendizagem significativa de SL com alunos do 8º ano do EF. Por outro lado, o trabalho de Silva, J. A. (2019) também com estudantes desse mesmo ano letivo, apontou a necessidade de um trabalho para melhoria da aprendizagem de métodos de resolução de SL. Em se tratando de EM, acreditamos que esses apontamentos de melhoria citados por Silva, J. A. (2019) podem ser ainda mais necessários, haja vista o trabalho do conteúdo de SL de 3 equações e 3 incógnitas e a necessidade de se ensinar os métodos resolutivos de Cramer e de escalonamento. Atentamos, ainda, para o fato de Martins (2019) também trazer uma sequência didática que propõe a abordagem de ensino *via/através* da RP com viés na exploração, resolução e proposição de problemas que trabalha com SL de duas e três equações e de duas e três incógnitas, mas que é feita apenas com estudantes de licenciatura em matemática e que, entretanto, não é investigada sua eficácia com estudantes de EF e EM.

Dessa forma, verificamos que não existem teses que envolvam o ensino de SL por meio da RP, sendo as investigações apenas exploradas em dissertações. Na construção de conhecimento científico, identificamos uma lacuna, referente a não existirem pesquisas no âmbito do EM que tragam uma sequência didática por meio de uma organização de ensino para o trabalho conceitual de SL que, ao nosso ver, podem contribuir para amenizar as dificuldades já citadas. Junto a isso, vemos a necessidade de que essa proposta de organização de ensino deve ser testada e avaliada em sala de aula, o que não vimos ocorrer em nenhuma das pesquisas

encontradas. Nesse contexto, Luz, Travassos e Proença (2022), ao entrevistarem sete professores de matemática sobre sua abordagem de ensino de SL com duas equações e duas incógnitas por meio da RP com turmas do EF, apontaram que quatro docentes não tinham entendimentos adequados sobre problemas, de modo que não seguiam o ensinar *via* RP. Segundo os autores, esse quadro aponta para uma necessidade de envolver professores de modo a (re)construírem seus conhecimentos sobre como abordar a RP em sala de aula.

Nesse panorama, julgamos o trabalho de Proença (2021) intitulado "Resolução de Problemas: uma proposta de organização do ensino para aprendizagem de conceitos matemáticos" uma proposta atual que pode ser adotada e testada pelo professor em sala de aula de modo a contribuir no ensino e aprendizagem de SL. Nessa proposta, o autor apresenta uma organização de ensino por meio da RP baseada em quatro etapas: i) uso do problema como ponto de partida; ii) formação do conceito; iii) definição do conteúdo; e iv) aplicação em novos problemas.

Assim, essa tese se pautará nessa proposta de abordagem de organização de ensino por meio da RP e partindo desses pressupostos e da carência de pesquisas, especialmente de teses que investiguem o uso da RP abarcando SL com estudantes de EM, em sala de aula, é que procuraremos responder à questão norteadora: Que contribuições a partir de uma organização de ensino por meio da resolução de problemas são identificadas na aprendizagem do conteúdo de sistemas lineares com estudantes do 2º ano do Ensino Médio?

Assim, essa tese tem por objetivo analisar as contribuições de uma organização de ensino por meio da resolução de problemas que beneficiam a aprendizagem do conteúdo de sistemas lineares com estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Desse modo, nossos objetivos específicos estão pautados na análise: i) da compreensão e desempenho dos alunos na etapa do uso do problema como ponto de partida para introduzir o conteúdo de SL; ii) da compreensão e desempenho dos alunos na etapa de formação do conceito de SL; iii) da compreensão e desempenho dos estudantes na etapa de definição do conteúdo de SL; iv) da compreensão e desempenho dos alunos na etapa de aplicação de novos problemas envolvendo SL; e da v) da compreensão e desempenho no uso do conteúdo de SL na resolução de problemas na avaliação escrita.

Diante disso, essa tese possui quatro seções, além da apresentação e da introdução.

A primeira seção, chamada de *Álgebra na Educação Básica* buscamos inicialmente apresentar como o ensino desse conteúdo deve ser concebido segundo os documentos oficiais como PCNs e a BNCC. Em seguida, falamos sobre as perspectivas do ensino de álgebra e o

pensamento algébrico, todos a luz de referenciais teóricos. Trazendo para a realidade escolar, falamos sobre o ensino algébrico nas escolas brasileiras e mais a frente sobre as perspectivas de ensino e aprendizagem para SL também no meio escolar.

Já a segunda seção intitulada *Resolução de Problemas* versa sobre a conceituação da RP e seu uso no ensino. Para tanto, discutimos sobre as diferenças entre problema e exercício. Aprofundamos no tema falando sobre as etapas para se resolver um problema de Polya (1994), Mayer (1992), Sternberg (2008) e Proença (2018) para daí sim falarmos sobre a RP para ensinar matemática (SCHROEDER; LESTER JUNIOR, 1989). Ato contínuo, apresentamos a proposta de organização de ensino para aprendizagem de conceitos matemáticos de Proença (2021). Fechando essa seção, apresentamos um panorama de teses e dissertações produzidas em âmbito nacional que discorrem sobre o ensino de SL por meio da RP.

Na terceira seção de *Metodologia* apresentamos a natureza de nossa pesquisa, sua descrição e desenvolvimento, o conhecimento do campo e dos participantes, nossa proposta de organização de ensino por meio da RP, os instrumentos e técnicas de coleta de dados, os procedimentos para coletas dos dados e, por fim, os procedimentos para análise de dados.

Na seção de *Resultados e Discussões* descrevemos os resultados alcançados nas quatro etapas de nossa organização de ensino, as quais são apresentados quadros, tabelas e figuras de modo a elucidar o leitor sobre a realidade encontrada durante as aulas da abordagem de ensino.

Por fim, na seção de *Conclusões,* são retomados a questão norteadora da pesquisa e seus objetivos específicos elencados. Nesse contexto, é descrita uma visão geral dos resultados alcançados, trazendo reflexões e abrindo horizontes para novas pesquisas que venham a contribuir para o ensino e aprendizagem de SL e da álgebra como um todo.

1. A ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Nessa seção, falaremos sobre os principais aspectos teóricos que envolvem o ensino e a aprendizagem da álgebra. Para tanto, falaremos sobre o que dizem os documentos oficiais brasileiros sobre o ensino da álgebra. Em seguida, falaremos sobre as perspectivas do ensino de álgebra e o pensamento algébrico. Por fim, falaremos sobre a situação do ensino algébrico nas escolas brasileiras e sobre as perspectivas do ensino de SL, foco de nossa pesquisa.

1.1 PCN e BNCC – O ensino de álgebra em documentos oficiais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN foram elaborados em 1997 e ainda têm relevante papel de modo a orientar a prática docente no cenário da educação brasileira. Em se tratando do ensino da álgebra, por meio de situações-problemas é que o estudante identifica distintas funções da álgebra, o que o possibilita criar padrões aritméticos, fazer modelagem matemática, construir relações entre grandezas, entre outras. Partindo desse contexto, é que fará a representação dos problemas na forma de equações e inequações, fazendo diferenciação entre incógnitas, tendo contato com fórmulas, aprendendo assim a "sintaxe", ou seja, as regras para resolução (BRASIL, 1998).

Para Ponte, Branco e Matos (2009), os símbolos algébricos é que permitem a expressão de forma rigorosa das ideias matemáticas, tornando a álgebra uma ferramenta poderosa para resolver problemas. Entretanto, os PCN (BRASIL, 1998, p.116) observam que "[...] existe um razoável consenso de que para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da Álgebra".

Os PCN tiveram sua vigência até que fosse formulada a Base Nacional Curricular originalmente vigente pela Lei número 13.005/2014 que é regulamentada pelo Plano Nacional de Educação (PNE). A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) tem por objetivo dar direção ao sistema educacional brasileiro relativas à formação humana, construindo uma sociedade inclusiva, justa e democrática (BRASIL, 2018). Assim, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 05) afirma ser "um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica".

Para a BNCC (BRASIL, 2018) a álgebra objetiva criar a ideia do *pensamento algébrico* para que o estudante possa compreender, representar e avaliar um sistema matemático composto por problemas quantitativos afim de que possa representá-lo por linguagens simbólicas e letras. Neste sentido, o documento retrata que os conteúdos matemáticos de maior relevância ligados ao conteúdo algébrico são: a proporção, o estudo de variação de grandezas, a equivalência e o uso de equações na resolução de problemas.

Para Maia *et al.* (2020) o docente necessita fazer a exploração de abordagens metodológicas desde os anos iniciais para que os alunos sejam introduzidos na aprendizagem da álgebra. Desta maneira, constrói-se uma base sólida na qual o estudante terá habilidade para resolver situações que pedem o conhecimento algébrico para sua resolução.

Pinheiro (2019, p. 40) corrobora com essa ideia afirmando que desta maneira "a quantidade de alunos nos anos finais do EF familiarizados com a linguagem algébrica será maior". Para o mesmo autor, as mudanças oriundas por meio da BNCC são importantes para a igualdade das aprendizagens essenciais, porém nos atenta para a realidade de muitas escolas que devem estar preparadas para implantar essas propostas com condições propícias de modo a alcançar as habilidades e competências demandadas pelo documento.

Em se tratando de EM, a BNCC traz uma proposta para a álgebra que transcende as escolas, pois exige que os alunos desenvolvam habilidades para sua vida pessoal e profissional. Com isso, o indivíduo não apenas resolverá problemas, mas também irá criá-los, fazendo ainda uma reflexão sobre enunciados e dados neles propostos. Como consequência, vemos uma característica multidisciplinar e interdisciplinar em relação a álgebra refletida pelas habilidades por ela desenvolvidas. Por conseguinte, os conteúdos matemáticos estabelecem conexões de forma a relacionar-se com diversas áreas do conhecimento conforme apontam os documentos da BNCC (ESTEVÃO, 2021).

As habilidades descritas para o EM na BNCC são de fundamental importância para a concretização do letramento matemático. Para este documento, raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente são competências e habilidades que favorecem a utilização de conceitos, ferramentas matemáticas, RP, formulação de problemas e estabelecimento de conjecturas que são definidos como pertencentes ao letramento matemático. Deste modo, evidencia-se o papel poderoso da álgebra e seu pensamento relacional tendo na BNCC a construção de importantes inovações e conquistas que necessitam marcar presença nos currículos, implicando assim na melhoria de vida dos estudantes (COSTA; ERICEIRA; NUNES, 2021).

Discorrido acerca do que dizem os documentos oficiais brasileiros sobre álgebra, a seção a seguir relata sobre as perspectivas de ensino e aprendizagem da álgebra escolar e a ideia do pensamento algébrico.

1.2 Perspectivas do ensino de álgebra e o pensamento algébrico

Estevão e Gonçalves (2021) apontam duas perspectivas sobre o papel do ensino da álgebra: sobre a ótica de Usiskin (1995) e de Fiorentini, Miorim e Miguel (1992,1993). Falaremos sobre essas duas concepções a seguir.

Para Usiskin (1995) a álgebra, relativa ao seu papel de uso de variáveis e o quão importante são seus diferentes usos, pode ser concebida de quatro maneiras, a saber:

- *Álgebra como aritmética generalizada:* concernente a variável vista como responsável por generalizar padrões.
- *Álgebra como estudo de relações entre grandezas:* nesta, as letras assumem diferentes valores, de forma a expressar relações entre eles, como acontece nos estudos de funções por exemplo.
- *Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas:* Aponta para o caso em que variável é vista como uma letra desconhecida cujo valor se pretende descobrir, ou seja, é vista como uma incógnita.
- *Álgebra como estudo de estruturas:* nesta última concepção, as variáveis são apontadas como termos abstratos, por exemplo, como quando são abordados os conteúdos de expressões algébricas.

Para Fiorentini, Miorim e Miguel (1992,1993) o ensino de álgebra pode ser decomposto em três concepções, a saber:

- *Linguístico-Pragmática*: neste, a álgebra é tratada como um instrumento para RP de uma forma técnica e mecânica. Nele, o aluno sabendo a técnica algébrica, já é o suficiente para torná-lo capaz de resolver um problema. Está concepção precede o período da matemática moderna.
- *Fundamentalista-Estrutural:* Concepção oriunda do aparecimento da matemática moderna. Nela surge uma preocupação em fornecer uma estrutura e uma fundamentação para a matemática a ser ensinada nas escolas. Manifesta-se uma necessidade de provar etapas e propriedades das técnicas algébricas.

- *Fundamentalista-Analógica:* Consiste em uma síntese das duas concepções citadas acima. Tem por objetivo a inquietação em justificar os cálculos algébricos por meio da geometria e fazendo uso de elementos visuais. Busca ainda a recuperação da álgebra enquanto instrumento para resolver problemas.

Estevão e Gonçalves (2021, p. 04) ao refletiram sobre as concepções propostas por Fiorentini, Miorim e Miguel (1992,1993) sustentam que ao estudá-las, vislumbramos a demanda de "desenvolver um pensamento que independentemente da linguagem algébrica pode ser manifestado: o pensamento algébrico". Sobre este, Blanton e Kaput (2005) define tratar-se de um processo no qual os estudantes desenvolvem a generalização de ideias matemáticas partindo de casos particulares, estabelecendo assim um discurso argumentativo que evolui a uma expressão cada vez mais formal e apropriados às suas idades. Em conformidade com o desenvolvimento do pensamento algébrico, os PCNs (BRASIL, 1998) apontavam que deveria ocorrer por intermédio de situações de aprendizagem de maneira que o aluno fosse capaz de:

> Reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas; traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções; Traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras; Utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico (BRASIL, 1998, p. 64).

Nesse contexto, Ponte, Branco e Matos (2009) orientam três demandas de competências e habilidades pertinentes ao pensamento algébrico:

> **Representar:** ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos. **Raciocinar:** relacionar (em particular, analisar propriedades); generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensões das regras; deduzir. **Resolver problemas e modelar situações:** usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (equações e inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação) (PONTE; BRANCO; MATOS, p. 11, 2009, grifo nosso).

Desta forma, Ponte (2006) nos atenta que no pensamento algébrico devemos ter um cuidado não somente com os objetos, mas com a relação existente entre estes, trazendo consigo a representação e o raciocínio em modos concretos e abstratos. Para promoção deste objetivo, uma maneira eficiente é dar ênfase a regularidades e padrões. Fiorentini, Miorim e Miguel

(1993, p.87) corroboram com essa ideia, salientando que “a percepção de regularidades, a percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam, as tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização”.

Ainda sobre essa temática, Ponte (2009) destaca os apontamentos inferidos pela NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) que cita alguns pilares para que se desenvolva o pensamento algébrico pelos alunos, a saber:

> - Compreender padrões, relações e funções.
> - Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos.
> - Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas.
> - Analisar a variação em diversos contextos (PONTE, 2009, p. 10).

Nesse panorama, Coelho e Aguiar (2018) enfatizam que o pensamento algébrico deve propiciar aos estudantes um pensamento que os ajude a buscar analogias e padrões quando enfrentarem problemas no seu dia a dia. Contraposto a isso, Marques (2017, p. 06) nos traz a luz que o ensino da álgebra “não pode ser reduzido à apresentação de técnicas de resolução ou exercícios de fixação. Esses procedimentos em nada contribuem para o desenvolvimento das habilidades [que se espera que os alunos desenvolvam]”.

Tais argumentos vêm ao encontro do que espera a BNCC (BRASIL, 2018) em relação a unidade temática de álgebra, cerne de nosso estudo:

> A unidade temática Álgebra tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. [...] Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações (BRASIL, 2018, p. 270).

Kuhn e Lima (2021) ao refletirem sobre a construção do pensamento algébrico tanto nos documentos dos PCNs quanto na BNCC observam que para que ele ocorra, os alunos devem ser capazes de realizar a formulação, o emprego e interpretação da Matemática em uma diversidade de contextos. Dessa forma, os autores apontam que na prática pedagógica é de suma importância que as estratégias de aprendizagem sejam trilhadas em uma ampla rede de

significados, em que o foco não seja apenas o cálculo, mas que permitam estabelecer relações entre os diferentes conhecimentos que os indivíduos já possuem.

Tendo em vista as perspectivas do ensino de álgebra observadas acima, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) observam que à medida que o pensamento algébrico do aluno se desenvolve, a capacidade de expressar situações e problemas matemáticos também terá uma grande evolução. Esse processo acarretará numa inter-relação entre o pensamento e a linguagem e não a uma subordinação.

Entretanto, o ensino e a aprendizagem da álgebra bem como o desenvolvimento da construção do pensamento algébrico encontram dificuldades no cenário das escolas e universidades. Sobre esse fato e alguns apontamentos para amenizar esse quadro é o que discorreremos a seguir.

1.2.1 Alguns estudos sobre dificuldades e horizontes para o ensino de álgebra e para a construção do pensamento algébrico

Tendo em vista os aspectos de perspectivas do ensino de álgebra e da construção do pensamento algébrico que descrevemos brevemente na subseção anterior, é importante traçar o panorama de apontamentos de dificuldades e horizontes encontrados por algumas pesquisas no âmbito de sala de aula, que contemplam desde os anos finais do EF, passando pelo EM e chegando até o ensino superior.

Nesse sentido, Mohr e Binotto (2022) ao investigarem sobre as concepções de álgebra, educação algébrica e pensamento algébrico de professores da educação básica encontraram diferentes pensamentos comparados ao apresentado na literatura. Porém, o destaque dos apontamentos dos investigados convergiu para a perspectiva da resolução de problemas e para a habilidade de generalização de situações que envolviam um padrão matemático. Concernente à ideia do pensamento algébrico os autores apontam que

> Dentre as vertentes fundamentais do pensamento algébrico propostas por Ponte, Branco e Matos (2009), observou-se que, de forma geral, todas aparecem entre as respostas dos professores, contudo, na maior parte das vezes, há o destaque para apenas uma vertente por resposta. Somente quatro professores descrevem o pensamento algébrico por meio de uma resposta que compreenda duas vertentes fundamentais do pensamento algébrico, sendo estas, raciocinar, resolver problemas e modelar situações e, representar, resolver problemas e modelar situações (MOHR; BINOTTO, 2022, p. 15).

Acerca deste contexto encontrado, Mohr e Binotto (2022) salientam sobre a importância de que todas as vertentes apontadas por Ponte, Branco e Matos (2009) sejam exploradas nas aulas do conteúdo de álgebra de modo que o aluno desenvolva de maneira completa o pensamento algébrico.

À vista disso, os pesquisadores russos Sibgatullin *et al.* (2021) fizeram uma revisão sistemática sobre o pensamento algébrico na educação abarcando artigos dos anos de 2013 a 2021 nas plataformas ERIC e Scopus. Nessa investigação, os autores identificaram que o número de estudos aumentou ao longo dos anos, sendo os alunos e professores do EF e do EM os mais pesquisados. No escopo dessa investigação apontou-se a necessidade da formação inicial e continuada do professor para melhoria do processo de ensino e aprendizagem do pensamento algébrico. Além disso, os autores enfatizam a importância apontada em pesquisas relativas ao uso de atividades rotineiras como jogos, com estratégias de representação geométrica e múltipla; e atividades mentais computacionais que devem ser usadas para melhoria do ensino da álgebra.

Do mesmo modo, Silva (2016) ao realizar uma pesquisa bibliográfica sobre ensino de álgebra e suas dificuldades apontou que a principal dificuldade se concentra em tornar a linguagem algébrica significativa para o estudante. Sobre esse fato, a autora propõe a exploração de atividades de padrões e regularidades de modo a trazer benefícios e possibilidades para desenvolver o pensamento algébrico, a capacidade de generalização e compreensão da linguagem algébrica dos alunos.

Estevão (2021) corrobora com essa ideia, ao fazer uma pesquisa bibliográfica sobre as dificuldades no ensino de álgebra e na construção do pensamento algébrico. Em sua investigação, o autor constatou que as dificuldades permeavam: a memorização, a compreensão e significação de situações e conceitos; a tradução da linguagem escrita para linguagem algébrica; dificuldades em utilizar fórmulas, procedimentos e propriedades. Nesse sentido, Estevão (2021) autor traz uma série de atividades algébricas que buscam contornar as dificuldades citadas.

Do ponto de vista do EF, Campos (2019) e Campos e Farias (2020) apontam que a proposição de atividades que englobem a aritmética e a álgebra na forma de RP é um caminho para se desenvolver o pensamento algébrico, tendo em vista a necessidade do estabelecimento de relações e conexões para encontrar a solução. Dessa forma, os autores enfatizam a importância do uso da linguagem natural em situações contextualizadas em problemas de

matemática que aproximam o estudante da realidade na qual vive tornando a sua aprendizagem útil e prazerosa preterindo a ideia de que é difícil aprender álgebra.

Nesse cenário, Souza (2019) analisou as dificuldades de 20 alunos do 8º ano na resolução de exercícios algébricos. O estudo mostrou que a não apropriação de conhecimentos prévios relativos a conceitos e propriedades, prejudicou a resolução dos exercícios. Além disso, o autor verificou que alunos faziam uso, na maioria das vezes, da aritmética e da linguagem natural como estratégia para resolver o exercício solicitado. Nesse sentido, Souza (2019) salienta a necessidade de "conhecimentos prévios que são base importante para uma aprendizagem significativa em álgebra e desta maneira também possa contribuir para ampliar a compreensão sobre o processo de ensino e aprendizagem de cada aluno" (SOUZA, 2019, p. 87).

Do mesmo modo, Nabais (2010) investigou 19 alunos do 9º ano do EF de Portugal na resolução de equações do 2º grau e verificou que os alunos desenvolveram o pensamento algébrico, mas apresentavam entraves para escolha de métodos mais simples para resolução de equações quadráticas, em operações de multiplicação e na tradução da linguagem natural para algébrica e vice-versa. Nesse sentido, autora sugestiona o uso de tarefas diversificadas de representação para a abordagem do conteúdo de equações quadráticas e para construção do pensamento algébrico dos estudantes.

Wettergren (2022) ao investigar 1700 alunos do 1º ao 9º ano do EF da Finlândia, planejou conduzir aulas de matemática com foco na argumentação e raciocínio sobre expressões algébricas. Na investigação Wettergren (2002) encontrou indicadores iniciais do pensamento algébrico sendo todos no campo numérico. Sobre os resultados, a autora salienta que o uso de modelos de aprendizagem como objetos de mediação e reflexão coletiva em espaço de trabalho coletivo serve de apoio para o pensamento algébrico inicial de jovens estudantes ao raciocinar sobre expressões algébricas.

Schwantes e Schwantes (2004) ao pesquisarem 13 alunos do 6º ao 9º ano do EF descreveram a importância de se desenvolver o pensamento algébrico fazendo uso da produção de significados em cada situação-problema. Isso possibilita aos alunos organizar e explorar de modo individual e coletivo suas capacidades e potencialidades ao expressarem seus pensamentos.

Do mesmo modo, Fernandes (2021) entrevistou professores e analisou livros didáticos do 7º ano do EF com referência ao conteúdo de álgebra. As entrevistas com os docentes apontaram para um processo de formação inicial com ênfase em conteúdos algébricos

preterindo questões pedagógicas relacionadas a didática de ensino desse conteúdo. Já os livros didáticos analisados mostravam a álgebra de maneira direta para posteriormente apresentar problemas propostas. Sobre tal fato, a autora aponta ser necessária a reflexão do ensino e a busca por abordagens de modo que a introdução de conhecimentos que fundamentam a álgebra possa desenvolver nos alunos um pensamento algébrico de maneira verdadeira.

Ainda no EF, Borralho e Barbosa (2009) ao pesquisarem alunos de 8º ano do ensino básico de Portugal, verificaram que a exploração de padrões num contexto de tarefas que buscavam a investigação matemática permitiu o desenvolvimento do pensamento algébrico. Nesse sentido, os autores orientam a necessidade de

> [...] mudar práticas de ensino, deixar para trás um ensino "tradicionalista" que promove a rotina e, consequentemente, aprendizagem "isolada" de conteúdos, para passarmos a ter práticas de ensino que desenvolvam aprendizagens significativas por parte dos alunos (BORRALHO; BARBOSA, 2009, p. 67).

Avançando para o EM, Becher (2009) ao pesquisar estudantes do 1º ano quanto a construção do pensamento algébrico, identificou indivíduos com obstáculos para estruturar formalmente a resolução de um problema. Nesse contexto, a pesquisa do autor apontou que os estudantes faziam pouco uso de abordagens algébricas, preferindo o uso de estratégias numéricas principalmente por tentativa e erro. Além disso, os investigados ainda produziram erros que delineavam o campo da aritmética e da álgebra. Nesse sentido, Becher (2009) infere sobre a necessidade da adoção em sala de aula de uma metodologia que oportunize a aprendizagem significativa da álgebra num contexto de RP.

Morais (2012) ao pesquisar alunos do 2º ano do EM de Portugal, na exploração de problemas envolvendo sequencias, verificou indivíduos com dificuldades para representar e generalizar diferentes situações matemáticas apresentadas. Numa visão geral da pesquisa, a autora apontou que os estudantes recorriam a representações informais por eles criadas e a linguagem natural em suas anotações. Nesse panorama, Morais (2012) infere que o escopo de seu estudo, com a realização de tarefas exploratórias, com interação social em pequenos grupos e em coletivo, utilizando distintas representações matemáticas e estratégias de generalização contribuíram para que ocorresse o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos investigados.

Töman e Gökburun (2022) investigaram 82 estudantes de EM da Turquia quanto ao conhecimento de álgebra e ao estabelecimento do pensamento algébrico. Nesse estudo, os autores verificaram alunos com equívocos de cálculos em expressões algébricas e, além disso,

com nível de pensamento algébrico baixo associado a entraves na transição da aritmética para a álgebra. Nesse sentido, Töman e Gökburun (2022) sugestionam firmemente a necessidade de um processo de ensino e aprendizagem com conexão entre a aritmética e álgebra pautados em estudos feitos nessa direção.

Da mesma maneira, Chinnappan (2004) investigou 58 alunos do EM de uma escola da Austrália na resolução de 16 problemas que exigiam conhecimentos algébricos. Nessa investigação, o autor verificou que os alunos apresentaram maiores dificuldades na resolução de equações que apresentavam uma estrutura mais complexas. Nesse sentido, Chinnappan (2004) infere que embora os alunos tivessem construído um repertório de habilidades processuais, havia lacunas de conhecimentos procedimentais quando se exigiam estratégias de resolução que abarcavam a demanda do conhecimento conceitual. Sobre isso o autor aponta que "Esses resultados sugerem que os alunos não desenvolveram os esquemas conceituais necessários ou tendiam a não integrar seu conhecimento procedimental com esquemas conceitualmente organizados" (CHINNAPPAN, 2004, p. 18, TRADUÇÃO NOSSA).

Já Demonty, Vlassis e Fagnant (2018), pesquisaram 100 professores do EF e do EM da Bélgica quanto à resolução de atividades algébricas realizadas por seus alunos. Os resultados mostraram que os professores investigados eram incapazes de apontar generalizações algébricas fora do padrão realizadas por este grupo de estudantes e, além disso, não conseguiam auxiliar seus alunos na melhoria da generalização aritmética. Os autores ainda verificaram que os docentes, embora reconhecessem que as atividades de generalização buscavam melhorar o pensamento algébrico, eles não tiveram uma percepção clara do papel do que sua abordagem de ensino pode desempenhar no processo do desenvolvimento algébrico.

Por fim, avançando num olhar para o ensino superior, Cury e Bortoli (2011) ao investigarem sobre a formação do pensamento algébrico com alunos calouros de um curso de licenciatura em Matemática, verificaram estudantes que não tinham o pensamento algébrico desenvolvido. Isso pôde ser determinado pelas dificuldades dos indivíduos no conhecimento de entes algébricos que abarcavam operações e propriedades. Além disso, os autores observaram entraves oriundas de atividades de transformações, baseadas em regras e na capacidade para abstração e generalização. Como sugestão, os Cury e Bortoli (2011) apontam a demanda de

> [...] algumas reflexões sobre a inter-relação entre conhecimentos e habilidades de resolução de questões algébricas e sugerimos que sejam elaboradas pelos professores atividades geradas a partir da análise de erros cometidos pelos alunos ao resolverem questões de Álgebra, como forma de auxiliar os estudantes a desenvolver o pensamento algébrico (CURY; BORTOLI, 2011, p. 12).

Do mesmo modo, Almeida e Câmara (2014) ao investigarem 22 licenciandos de Matemática, perceberam que os futuros docentes tinham dificuldades na percepção de indícios do pensamento algébrico ao se depararem com respostas de alunos da educação básica, quando tais respostas não eram apresentadas por uma linguagem algébrica formal. Sobre esse fato Almeida e Câmara (2014, p. 15) defendem a ideia de ser necessária a discussão das diferentes "estratégias adotadas por alunos da educação básica ao se depararem com problemas de estrutura algébrica. Além disso, acreditamos também que seja interessante discutir o que caracteriza pensar algebricamente".

Tendo em vista os referenciais teóricos supracitados, vemos que as dificuldades do ensino de álgebra e para construção do pensamento algébrico se encontram em diferentes contextos. Passando pela necessidade do trabalho em uma abordagem de ensino que abarque as três vertentes (representar, raciocinar e resolver problemas e modelar situações) apontadas por Ponte, Branco e Matos (2009) conforme sugerem Mohr e Binotto (2022). Outra demanda diz respeito a práticas de ensino que promovam a aprendizagem significativa dos alunos de modo que as dificuldades no campo da aritmética e da álgebra sejam reconstruídas (BORRALHO, BARBOSA; 2009; BECHER, 2009). Nesse sentido, vimos que Fernandes (2021) salienta ser necessária a busca de abordagens de ensino que introduzam conhecimentos fundamentais da álgebra para a construção do pensamento algébrico, que ao nosso ver pode ser feita por meio do trabalho conceitual de conteúdos de álgebra em sala de aula seja por meio da RP ou outras vertentes do ensino da Matemática.

Em um olhar para o EF e para o EM verificamos pesquisas apontando estudantes com dificuldades convergentes em obstáculos para representar situações naturais para a forma algébrica em problemas propostos (MORAIS, 2012), na transição da aritmética para a álgebra (TÖMAN; GÖKBURUN, 2022), na escolha de estratégias mais simples de resolução de atividades algébricas (NABAIS, 2019) e para tornar a linguagem algébrica significativa para o aluno (SILVA, 2016). Nesse contexto, vemos trabalhos apontando dificuldades em resolução de problemas sobretudo em processos algorítmicos devido a entraves em conhecimentos conceituais de álgebra (SOUZA, 2019; CHINNAPPAN, 2004). Em uma síntese dessas ideias, Estevão (2021) aponta em sua pesquisa bibliográfica que as dificuldades de ensino da álgebra enfrentadas pelos estudantes envolvem aspectos relacionados a memorização, a compreensão e significação de situações e conceitos, a tradução da linguagem escrita para linguagem algébrica e dificuldades em utilizar fórmulas, procedimentos e propriedades.

No campo do ensino superior vemos estudos que mencionam licenciandos do curso de matemática com entraves em operações algébricas (CURY; BORTOLI, 2011) e com dificuldades para indicar indícios de pensamento algébrico em respostas de alunos da educação básica (ALMEIDA; CÂMARA, 2014).

Nesse sentido, os apontamentos de contorno para as dificuldades citadas indicam ser importante a melhoria da formação inicial e continuada de professores (SIBGATULLIN ET AL., 2021), a proposição de atividades que englobem a aritmética e a álgebra na forma de RP de modo a estabelecer relações e conexões entre a linguagem natural e a linguagem algébrica (CAMPOS, 2019; CAMPOS; FARIAS, 2020) e para a necessidade de abordagens de ensino de modo a caminhar para reconstrução dos obstáculos mencionados, de maneira que os alunos possam aprender conceitos/assuntos/conteúdos de álgebra e construir o pensamento algébrico de maneira que a aprendizagem seja significativa.

Após indicarmos alguns estudos sobre dificuldades e horizontes para o ensino de álgebra e do pensamento algébrico, a seção a seguir discorre sobre a situação do ensino algébrico nas escolas brasileiras.

1. 3 O ensino de álgebra na educação básica brasileira

Para discorrer sobre o ensino de álgebra nas escolas brasileiras, um parâmetro inicial a ser abordado, é a análise dos dados de provas externas como a prova Saeb, realizado a nível nacional, e a prova Pisa, realizada internacionalmente.

O Saeb[1] consiste em uma avaliação a cada 2 anos que é aplicada a alunos de escolas públicas e uma parcela amostral de estudantes de instituições particulares. Seu objetivo é averiguar a qualidade do ensino brasileiro ao final das etapas do EF e do EM versando ao INEP[2] um diagnóstico da situação da Educação Básica em nosso país. Antes aplicadas somente para as disciplinas de Português e Matemática, em 2019 o Saeb se adequou à nova BNCC e trouxe consigo avaliações em novas áreas do conhecimento, como as Ciências Humanas e da Natureza.

Os dados do Saeb 2019 (BRASIL, 2021) apontaram um quadro preocupante para a educação brasileira concernente ao ensino da matemática. Constatou-se que apenas 18% dos alunos do 9º ano do EF eram proficientes na disciplina de Matemática. A situação torna-se ainda

[1] Sistema de avaliação da educação básica
[2] Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

grave com relação aos estudantes dos anos finais do EM, na qual apenas 5% apontaram ter proficiência em Matemática, índice mantido desde o Saeb do ano de 2017.

Dentro desse contexto, outra prova externa relevante que podemos citar é o Pisa[3] (BRASIL, 2021). Este, é um estudo realizado a cada três anos, no qual participam os países que integram a OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico). Essa avaliação permite um estudo comparativo de conhecimentos e habilidades dos alunos em Matemática, Ciências e Domínio de Leitura realizada em diferentes níveis de ensino. Também são avaliados diferentes domínios, como a competência global e o letramento financeiro, também denominados como domínios inovadores.

O último exame do Pisa foi realizado no ano de 2018 e, em relação à disciplina de Matemática, apontou que:

> 68,1% dos estudantes brasileiros estão no pior nível de proficiência em matemática e não possuem nível básico, considerado como o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Mais de 40% dos jovens que se encontram no nível básico de conhecimento são incapazes de resolver questões simples e rotineiras. Apenas 0,1% dos 10.961 alunos participantes do Pisa apresentou nível máximo de proficiência na área (BRASIL, 2021).

Para Kuhn e Lima (2021), o desempenho dos alunos no Saeb (BRASIL, 2021) e no Pisa (BRASIL, 2021) em relação à disciplina de Matemática nos direciona para um trabalho do professor em fragmentos, o qual não propicia desenvolver competências e habilidades do conhecimento algébrico. Verifica-se que as estratégias de ensino de cálculo algébrico são feitas em grande parte com equações prontas e os alunos permanecem tendo dificuldades para entender a sequência de operações mecanizadas que tem que realizar.

Estudos mostram que quando os alunos aprendem de forma mecânica, eles não interagem com os seus conhecimentos prévios e esse quadro não ocasiona aprendizagens novas. O que é aprendido sem utilidade e sem significado pelo estudante é esquecido mais rapidamente, o que pode justificar o baixo desempenho estudantil nas avaliações externas de Matemática (KUHN; LIMA, 2021).

O advento da BNCC consolidou a álgebra como uma unidade temática por meio de uma reestruturação no currículo de maneira que deva ser ensinada a partir dos anos iniciais e não apenas de forma abrupta no 8º ano do EF sem que os alunos tenham conhecimentos prévios deste conteúdo. Quando observamos as medidas que a BNCC promove, o documento traz a

[3] Programa Internacional de Avaliação de Alunos

ideia de que álgebra se tornou mais leve pois aparece na grade curricular desde o 1º ano do EF, permitindo maior compreensão e promoção para que se desenvolva o pensamento algébrico (KUHN; LIMA, 2021).

Borges (2018) em seu trabalho buscou mapear o estado da arte do estudo da álgebra a nível de EF e EM de 42 trabalhos brasileiros, sendo 3 teses de doutorado e 39 dissertações de mestrado. Em sua pesquisa, o autor encontrou trabalhos que revelaram que os professores pesquisados buscavam trabalhar atividades algébricas mais simples deixando de lado as mais elaboradas alegando que os alunos tinham muitas dificuldades. Verificou também docentes presos ao livro didático, que não trabalhavam o conteúdo algébrico de forma contextualizada e interdisciplinar. Por fim, Borges (2018) ainda completa esse quadro inquietante com mais alguns resultados encontrados em seu estudo:

> Vimos a maioria das pesquisas mostrarem as dificuldades dos alunos para aprenderem conteúdos algébricos e algumas das dificuldades do professor em ensinar tais conteúdos, no entanto, não encontramos pesquisas que tratem do que é ensinado como sendo Álgebra. O que está posto, tanto em livros didáticos, quanto em documentos oficiais, privilegia o cálculo algébrico a partir de suas regras operatórias e grande parte das pesquisas focam em diversas estratégias para a aprendizagem dessas regras (BORGES, 2018, p. 155).

Dentro deste panorama de dificuldades no ensino da álgebra postas até aqui e na expectativa de mudanças para melhoria, Müller, Hetkowski e Pinheiro (2017) apontam abordagens de ensino promissoras, como as baseadas em investigação matemática, jogos matemáticos e na RP. Da mesma maneira, objetivando a aprendizagem significativa dos estudantes, Moreira (2010) destaca ser primordial que se considere o aluno como o principal autor que constrói seu conhecimento, na qual o docente é o promotor que conecta os conhecimentos que o estudante já possui com os novos, participando em um cenário de RP.

Após conhecermos a situação do ensino da álgebra nas escolas brasileiras, a próxima seção buscará trazer a luz as perspectivas de ensino e aprendizagem mais especificamente sobre o conteúdo de SL, foco do nosso trabalho.

1.4 Estudos sobre perspectivas de ensino e aprendizagem de sistemas lineares

Com relação ao ensino de sistemas de equações, os PCNs (BRASIL, 1998) preconizavam que este deve:

> [...] receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3 (BRASIL, 1998, p. 122).

Da mesma maneira, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 528) complementa essa ideia ao citar que o ensino deste conteúdo deve possibilitar ao estudante "resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais".

Dentro destes conceitos expostos pelos PCNs e pela BNCC, Pontes (2021) afirma que o ensino de SL é de grande importância para que os alunos compreendam e possam resolver diferentes problemas matemáticos entendendo assim as suas aplicações no cotidiano. Em contrapartida, trabalhar esse conteúdo em sala de aula ainda gera muitas dificuldades tanto para professores quanto para alunos. Discorrer sobre essas dificuldades e os trabalhos que visam contorná-las é o que buscaremos fazer a seguir.

Ferreira (2013) destaca em seu trabalho que o conteúdo de SL no EM é ensinado de maneira breve e superficial. Muitas vezes, isso leva os alunos a pensarem que este conteúdo é finito e termina ali, não vendo nem sequer alguma aplicação. As situações problemas são propostas pelos livros didáticos, entretanto não são trabalhadas aplicações aferindo sua importância para ciência. Para o autor, ao se trabalhar SL verifica-se uma linguagem formal e generalizada que chega aos estudantes com pouca clareza, pois a preocupação é na maioria das vezes com a manipulação algébrica, desfavorecendo a concepção do conteúdo a ser estudado. Não existe uma abordagem mais aprofundada e com sofisticação, nem a aprimoração dos problemas que são apresentados e isso impede uma visão mais geral sobre o tema abordado.

Reforçando estas ideias, Battaglioli (2008) em sua pesquisa verificou que os livros didáticos têm por prioridade os cálculos algébricos preterindo as situações problemas ao abordarem o conteúdo de SL. Já Cataneo e Rauen (2018) ao analisarem um livro didático de matemática do 8º ano EF sob o ponto de vista da representação semiótica no capítulo sobre sistemas de equações, constataram o prevalecimento de situações matemáticas que solicitavam que os estudantes transformassem a representação da língua materna para o registro na forma algébrica. Os autores ainda verificaram uma ausência de propostas para que os alunos pudessem elaborar problemas, pouca exploração de interpretações gráficas e de conversões inversas.

Negromonte *et al.* (2009), ao trabalhar com alunos de 7º ano do EF constatou que os estudantes tinham dificuldades para compreensão e até mesmo rejeição ao fazerem uso de incógnitas na RP a eles propostos. Completando esse quadro, Valenzuela (2007) em seu estudo

com estudantes do 8º ano do EF, aponta a fala de um docente em relação a pouca maturidade dos alunos para interpretação e RP que envolviam sistemas de equações do 1º grau.

Um pouco mais à frente no EF, Delazeri (2017) pesquisou 30 alunos de 9º ano do EF sobre a resolução de problemas que envolviam o pensamento algébrico nos conteúdos de equações do 1º grau e com SL com duas equações e duas incógnitas. Os resultados mostraram que os alunos tiveram dificuldades em tópicos que envolviam SL e que possuíam uma compreensão limitada sobre esse conteúdo matemático. Alguns estudantes até conseguiam escrever um SL equivalente ao problema dado, mas erravam sua resolução. Nesse sentido, Delazeri (2017) salienta sobre a necessidade de serem desenvolvidas pesquisas com atividades didáticas para o desenvolvimento do pensamento algébrico à metodologia de resolução de problemas relacionadas ao ensino de SL.

Nesse cenário, Cunha Neto (2020) ao fazer uma pesquisa bibliográfica sobre a resolução de SL apontou que a organização de ensino em salas de aulas não privilegia as discussões de juízos, conceitos e a formação do pensamento teórico que permita o desenvolvimento do aluno. O autor aponta que a organização de ensino baseada na teoria da atividade de estudo permite ressignificar o ensino da álgebra e de SL no EM, levando ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Nesse sentido, Jordão (2011) ao analisar estudantes do 2º ano do EM na resolução algébrica e gráfica de SL do tipo 3x3, encontrou uma série de dificuldades no processo de resolutivo dos alunos: (a) dificuldades na interpretação de enunciados de problemas; (b) dificuldades para combinar duas a duas equações em um SL de 3 equações de modo a encontrar a solução; (c) dificuldades em tratamento aritmético que não permitiam classificar corretamente um SL. Sobre esses obstáculos enumerados, o autor aponta a importância de novos estudos de abordagens de ensino de SL do tipo 3x3 de modo a reconstruir os entraves encontrados.

Na busca por contornar essas dificuldades supracitadas, trabalhos como de Pontes (2021) propõe uma proposta fundamentada numa estratégia de intuição para resolver SL com duas equações e duas incógnitas com coeficientes positivos. Ele se fundamenta em situações matemáticas apresentadas aos estudantes por meio de tabelas de dados. Pontes (2021, p. 12) sustenta que sua atividade proposta “pode facilmente cooperar para aperfeiçoar a aprendizagem e o desempenho cognitivo dos alunos, assim como, novas contribuições metodológicas ao professor para o ensino de matemática”.

Em se tratando de trabalhos que visam trabalhar com SL com três equações e três incógnitas a nível de EM, Rodrigues, M. S. (2017) traz atividades de SL para serem trabalhadas

com alunos desta etapa escolar, envolvendo abastecimento de água, expansão de bairro, venda de automóveis e rótulo de embalagens de alimentos. Sobre usar essas situações problemas com os estudantes, o autor enfatiza que vale a pena "[...] mostrar como podemos aplicar conhecimentos de matemática em problemas reais do cotidiano. Isso implica em um aprimoramento por parte do professor, sempre na busca de soluções de novos problemas que surgem no magistério" (RODRIGUES, M. S., 2017, p. 61).

Já Pereira (2017) elaborou em sua dissertação, uma sequência didática para o ensino de SL para alunos do 2º ano do EM por meio de aplicações práticas explorando as posições de retas no software GeoGebra. Pereira (2017, p. 80) afirma que essa sequência didática pode "possibilitar ao aluno, caminhos para que o mesmo compreenda o que está fazendo e não torne o processo de resolução dos sistemas enfadonho ou até certo ponto mecânico". Bezerra *et al.* (2019) na mesma perspectiva traz sugestões de utilização do GeoGebra para aplicativos de smartphones sugerindo o GeoGebra 2D para o ensino de sistemas de equações do 1º grau do tipo 2 por 2 e o GeoGebra 3D para o trabalho com SL do tipo 3 por 3. Os autores supracitados enfatizam que desta maneira os alunos podem percebem a relevância de se trabalhar de maneira unificada a álgebra com a geometria, favorecendo a compreensão dos conteúdos matemáticos abstratos.

Neste mesmo cenário, Fonseca (2017) buscou usar princípios básicos de programação para que seus alunos do 2º ano do EM pudessem elaborar um aplicativo para smartphones Android que resolvesse SL. Como premissa final de sua pesquisa de dissertação, o autor verificou que os alunos ficaram mais motivados para aprender o conteúdo proposto e melhoraram o desempenho escolar. Por fim, Ferreira (2013) em sua dissertação objetivando mostrar a importância de se ensinar SL por meio da análise de livros didáticos e de questões de vestibular, constatou em seus objetos de pesquisa, o uso prioritário de atividades de manipulação algébrica e que estes, não oferecem exemplos com aprofundamento que esclareçam a importância do conteúdo para o cotidiano dos alunos. Para contornar esse problema a autora oferece em seu trabalho uma abordagem com a utilização dos softwares GeoGebra, Winplot e Máxima por meio de situações enriquecedoras para com os estudantes.

Num panorama internacional, trabalhos como de Yan e Lin (2015), ao analisar as diferenças entre livros didáticos finlandeses e taiwandeses quanto ao ensino de SL, os resultados obtidos apontaram que, o primeiro fazia a introdução desse conteúdo matemático por meio de uma abordagem gráfica, enquanto o outro utilizava uma abordagem algébrica. Os resultados também apontaram que os livros didáticos de Taiwan tinham menos problemas, porém, mais

desafiadores e com maior grau de exigência cognitiva e, na sua maioria, abertos , fato que exigia que os estudantes explorassem e explicassem suas resoluções. Já os livros didáticos da Finlândia traziam problemas mais autênticos e apresentados em formas visuais , sendo em grande proporção, problemas de exploração.

Dentro de métodos resolutivos de SL, Maharani (2020) ao investigar 40 alunos do EM da Indonésia verificou que 30 alunos preferiram a resolução usando o Regra de Cramer e apenas 10 preferiram usar o escalonamento. Ao entrevistar os alunos pesquisados sobre as etapas de resolução de SL, o autor concluiu que na visão dos investigados, embora a Regra de Cramer tenha mais etapas, a sequência do processo de resolução é clara e sem a necessidade de raciocínio matemático. Na opinião desses estudantes, o escalonamento tem etapas mais curtas, mas requer um forte raciocínio matemático em cada etapa. Dessa forma, Maharani (2020) conclui que os participantes de sua pesquisa são limitados na escolha de etapas de resolução de SL, devido a necessidade de um raciocínio matemático mais elaborado.

Oktaç (2018) ao pesquisar alunos de EM do México e do Uruguai relativos às suas concepções sobre SL e suas soluções concluíram que as dificuldades dos investigados tinham origem desde o EF, EM e chegando até o ensino superior. Tais entraves apontavam para obstáculos em identificar conceitos de SL, seja por meios geométricos, algébricos e até em espaços bidimensionais e tridimensionais. Nesse contexto, Oktaç (2018, p. 92, tradução nossa) ressalta “a importância de os professores perceberem esses fenômenos, a fim de desenvolverem estratégias adequadas para lidar com eles em sala de aula e auxiliar no processo de aprendizagem”.

Dewi *et al.* (2021) pesquisaram e entrevistaram três licenciandos de matemática da Indonésia na resolução de quatro problemas equivalentes a SL que exigiam a compreensão conceitual. Entre os resultados, os autores identificaram futuros professores com preferência para resolver problemas de forma procedimental. Além disso, apontaram que os investigados apresentaram dificuldades para construir relações entre algoritmos devido ao conhecimento conceitual imaturo. Nesse sentido, Dewi *et al.* (2021) sugerem que

> [...] novas pesquisas sejam realizadas com futuros professores, professores, palestrantes e pesquisadores para examinar o processo de compreensão conceitual realizado experimentalmente em sala de aula. Além disso, é necessário pesquisar como a compreensão conceitual pode influenciar o processo de pensamento criativo em problemas matemáticos [DEWI ET AL., 2021, p. 11, tradução nossa].

Em um olhar sobre os trabalhos elencados, vemos que as pesquisas nacionais apontam um foco de ensino no contexto do cálculo algébrico o que acaba causando diversas dificuldades de aprendizagem e tornando o ensino mecânico e sem conexão com a realidade (FERREIRA, 2013). Tal fato, também foi apontado em pesquisas feitas em livros didáticos (BATTAGLIOLI, 2008; CATANEO; RAUEN, 2018). Esse quadro traz consigo um ensino em sala de aula com alunos com dificuldades de compreensão, rejeição e com pouca maturidade para resolverem problemas envolvendo o conteúdo de SL (NEGROMONTE ET AL., 2009; VALENZUELA, 2007). Nesse panorama, pesquisas apontam ainda estudantes com dificuldades de resolução de problemas de SL relacionados a conhecimentos conceituais e procedimentais que necessitam ser tratadas e reconstruídas (CUNHA NETO, 2020; DELAZERI, 2017; JORDÃO, 2011).

Nesse sentido, pesquisas internacionais ainda apontaram alunos de EM com obstáculos para escolher estratégias de RP de SL e com entraves quando a resolução exigia um raciocínio matemático mais elaborado (MAHARANI, 2020). Nesse panorama, Oktaç (2018) verificou alunos de EF e EM com dificuldades para identificar conceitos de SL e Dewi *et al.* (2021) identificou licenciandos de matemática com dificuldades para construir relações entre algoritmos de SL devido ao conhecimento conceitual imaturo.

Desta forma, vimos acima que alguns trabalhos tentam contornar essas dificuldades por meio do trabalho com a RP ou com o uso de tecnologias, porém a maioria desses estudos ficam no âmbito da proposta de abordagem de ensino e não verificam sua eficácia quando implementadas em sala de aula. Todos esses obstáculos citados apontam para a necessidade de novas pesquisas abarcando a formação inicial e continuada, bem como abordagens de ensino investigados efetivamente em sala de aula, de modo a reconstruir esse quadro de entraves supracitados.

Após falarmos sobre as perspectivas de ensino e aprendizagem de SL, tanto no EF, no EM e no Ensino Superior, na próxima seção falaremos sobre a abordagem da RP foco de nosso trabalho. Assim, falaremos sobre o conceito de problema, de RP e do ensino e aprendizagem da matemática nessa abordagem.

2. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nessa seção explanaremos sobre os referenciais teóricos inerentes a RP. Assim, serão discutidas inicialmente as diferenças de problema e exercício a luz de alguns autores. Em seguida, discorreremos sobre as etapas para se resolver um problema, segundo os apontamentos de Polya, Mayer, Sternberg e Proença. Na sequência, falaremos sobre o papel da RP para ensinar matemática. Após, será apresentada uma proposta de ensino para aprendizagem de conceitos matemáticos por meio da RP. Ao término desta seção, traçamos um panorama das teses e dissertações produzidas que abarcam o ensino de SL por meio da RP.

2.1 Problema ou exercício?

Ao discutirmos o conceito de problema, logo nos deparamos com a necessidade de compará-lo com o conceito de exercício. Nesta conceituação, Echeverría (1998) sustenta que os exercícios possibilitam a consolidação e automatização de algumas habilidades, procedimentos e técnicas que se fazem necessários para que o aluno possa solucionar problemas posteriormente. Reafirmando essa ideia, Echeverría e Pozo (1998) nos trazem a luz que:

> Uma situação somente pode ser concebida como um problema na medida em que exista um reconhecimento dela como tal, e na medida em que não disponhamos de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-la de forma mais ou menos imediata, sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 16).

Nesta perspectiva, Schoenfeld (1985) alerta-nos para o cuidado na definição do que é um problema, pois tarefas difíceis para alguns estudantes podem ser relativamente fáceis para outros. Para o autor, a dificuldade relacionada a um problema está vinculada ao impasse intelectual e não há um percalço ao se realizar um cálculo matemático. Sobremaneira, na visão de Schoenfeld (1985), quando um indivíduo já conhece de antemão um esquema para resolver uma situação que lhe é proposta, tal atividade diz respeito a um exercício e não a um problema.

Para Echeverría (1998), podemos falar da existência de um problema, quando o indivíduo tenta resolver uma tarefa e se depara com alguma dificuldade que o leva ao questionamento de qual caminho deve seguir para alcançar a meta almejada. Corroborando com esse contexto, Brito (2010) tem em sua visão, que o problema é capaz de levar o estudante a

combinações, em sua estrutura cognitiva, de princípios e conceitos, procedimentos e técnicas, habilidades e conhecimentos que já conhece e que se fazem necessários para resolver uma atividade que lhe é proposta e que demande, para tanto, uma reorganização conceitual e cognitiva.

Dessa forma, podemos reafirmar o conceito de problema proposto por Echeverría e Pozo (1998) por meio da reflexão de Proença (2018):

> No caso da Matemática, entendemos que uma situação de Matemática se torna um problema quando a pessoa precisa mobilizar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos aprendidos anteriormente para chegar a uma resposta. Não se trata, assim, do uso direto de uma fórmula ou regra conhecidas – quando isso ocorre, a situação tende a se configurar como um exercício (PROENÇA, 2018, p. 17-18).

Após conceituarmos problema e exercício sobre a ótica de alguns teóricos, a seção a seguir busca apresentar as etapas de RP segundo a visão de alguns estudiosos.

2.2 As etapas para se resolver um problema

Muitas são as vertentes que nos elucidam sobre as etapas de resolução de um problema, falaremos a seguir sobre as visões dos autores Polya (1994), Mayer (1992), Sternberg (2008) e Proença (2018) sobre essa conceituação.

2.2.1 As fases de Polya

Polya (1994) em seu livro “A Arte de Resolver Problemas” defende que o processo de resolução de um problema envolve quatro fases: Compreender o problema, estabelecer o plano de resolução, executar o plano e realizar o retrospecto. Sobre tais fases, explanaremos a seguir:

Compreender o problema é a fase na qual o indivíduo se ambienta com o problema que lhe é proposto, facilitando sua compreensão. Para tanto, se fazem necessárias leituras com muita atenção, fazendo o uso de desenhos, indicando dados e incógnitas. Todavia, o estudante é que deverá encontrar caminhos com as principais ideias para resolução do problema (POLYA, 1994).

Estabelecer o plano de resolução consiste no momento no qual a partir de problemas que já se tenham resolvidos e experenciados, o estudante pode estabelecer uma relação entre os dados e a incógnita. Por meio disso, é possível se chegar a um plano de resolução. Nesta etapa,

podem ser feitos questionamentos como: Já viu um problema desse antes? Já viu algum problema ligeiramente diferente ou correlato? Existem problemas que poderiam ser úteis para resolver o problema proposto? Tais questionamentos, ajudam o estudante na reflexão e na elaboração de um caminho para chegar à resolução do problema apresentado (POLYA, 1994).

Executar o plano é a fase que exige do aluno conhecimentos prévios, bons hábitos mentais e concentração no objetivo almejado. Se faz necessário que exista uma convicção dos detalhes que fazem parte do roteiro, o que requer que estes sejam examinados detalhadamente um após o outro de maneira que tudo seja visualizado de forma clara não abrindo caminhos que possam levar a erros. Cabe ao professor a insistência para que o aluno execute cada passo conforme planejado na fase anterior (POLYA, 1994).

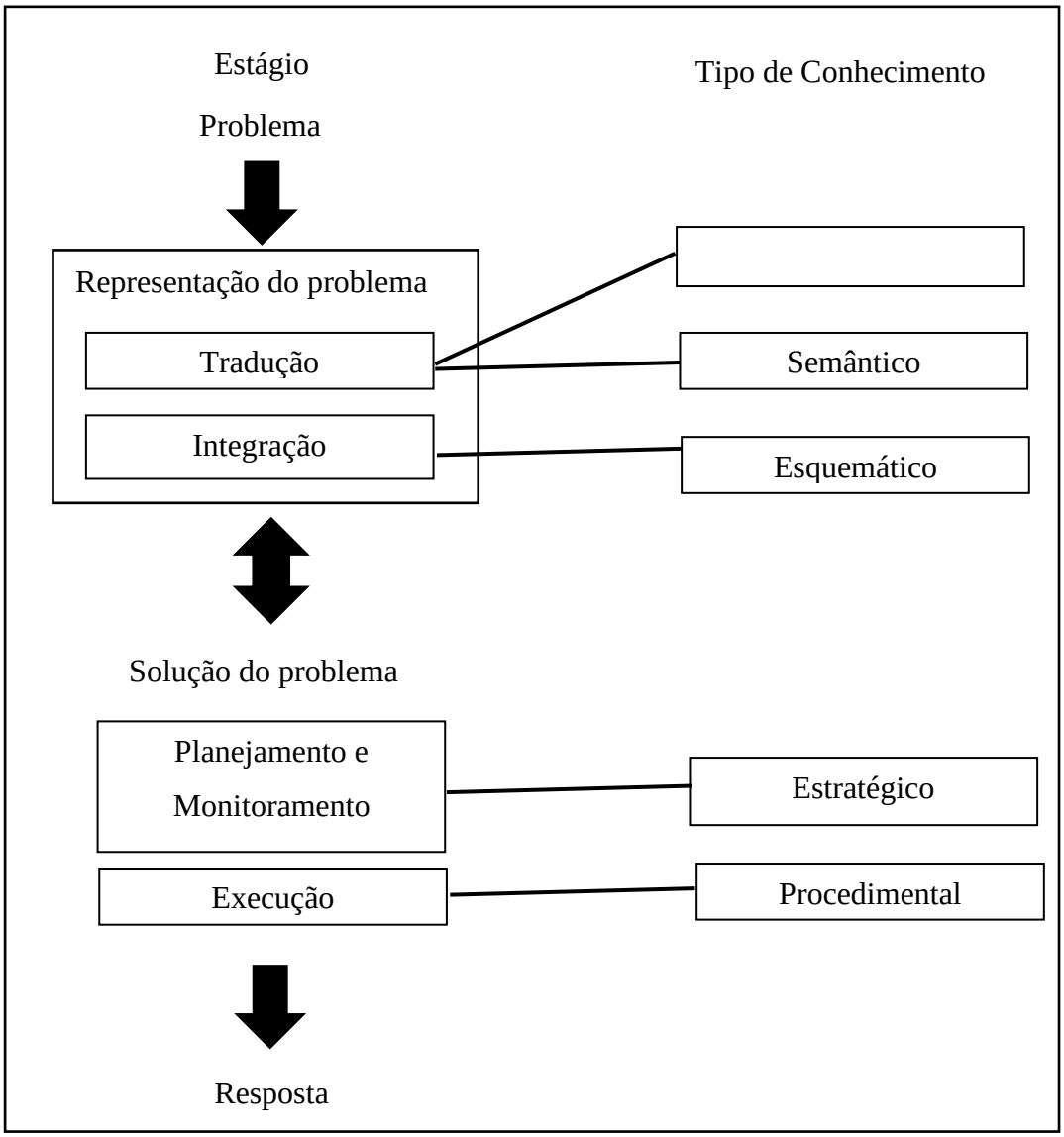
Por fim, o *Retrospecto* é a última fase na qual se verifica a resolução seguida e se a resposta encontra é coerente com o questionamento do problema proposto. Para Polya (1994, p. 10) isso permite ao indivíduo "consolidar seu conhecimento e aperfeiçoar sua capacidade de resolver problemas".

2.2.2 Os processos de resolução de Mayer

Para Mayer (1992) existem dois estágios inerentes ao processo de RP: a representação do problema e a solução do problema. A *representação do problema* é dividida em dois subestágios, a saber – a tradução e a integração do problema. O primeiro exige os conhecimentos linguístico e semântico, já o segundo necessita do conhecimento esquemático. Na *solução do problema*, os subestágios são o planejamento e monitoramento que demandam o conhecimento estratégico e a execução que requer o conhecimento procedimental para que se chegue à resposta do problema.

A Figura 1 a seguir, nos traz luz ao processo de RP sobre a ótica de Mayer (1992):

Figura 1 - Processo de resolução de problemas matemáticos.



Fonte: Mayer (1992, p. 459)

Da Figura 1, podemos observar que os *conhecimentos linguísticos e semânticos* dizem respeito ao momento em que ocorre a tradução dos dados presentes no problema por meio da representação mental. O conhecimento da língua materna nesse processo encabeça o conhecimento linguístico, enquanto o conhecimento semântico é oriundo da tradução de termos e significados matemáticos e das relações que estabelecem entre si.

O *conhecimento esquemático* é relativo ao momento em que o indivíduo reconhece o conteúdo matemático do qual se trata o problema. Mayer (1992, p. 465) exemplifica esse processo afirmando que "[...] quando você reconhece que esse problema, envolve a fórmula de área, você ativou um esquema para esse problema". Assim, quando um aluno encontra dificuldades para a resolução de um problema isso pode ser devido a utilização de esquemas

incorretos. Já o uso de esquemas corretos, permitem encontrar o caminho de resolução, como também a atenção a informações relevantes constantes no enunciado do problema.

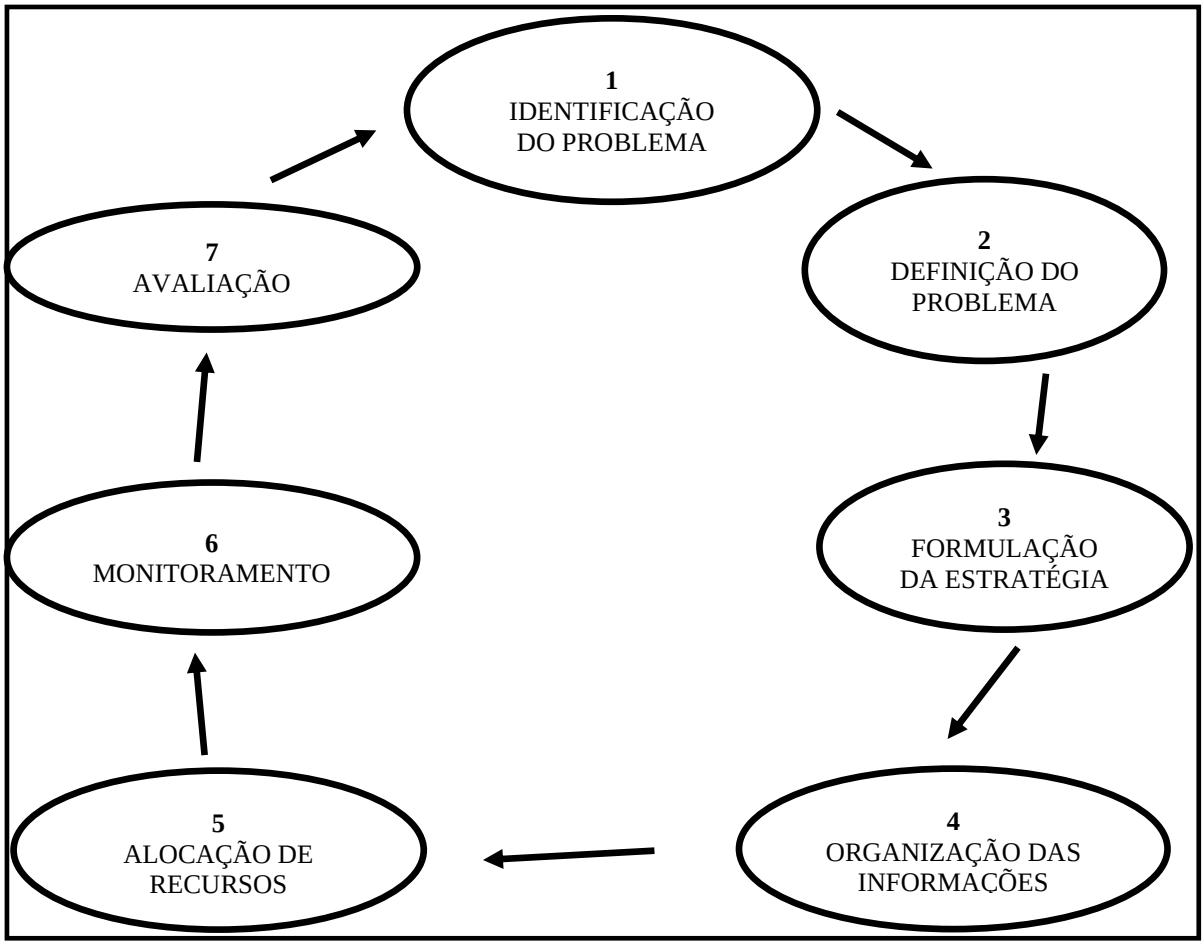
Em se tratando em *conhecimento estratégico*, esse tem referência a prática de gestão e monitoramento do plano de solução estabelecido. A estratégia de resolução e sua gestão, depende do tipo de problema e da pessoa que procura alcançar sua solução.

Por fim, o *conhecimento procedimental* relaciona-se a execução do plano de solução, envolvendo ações como cálculos aritméticos e algébricos.

2.2.3 O ciclo da solução de problemas de Sternberg

Sternberg (2008) por meio de seus estudos em psicologia cognitiva, descreveu um ciclo para solução de problemas baseadas em 7 passos, a saber: identificação do problema; definição e representação do problema; formulação da estratégia; organização da informação; alocação de recursos, monitoramento e avaliação. A Figura 2 abaixo, nos traz uma forma didático de como ocorre esse ciclo de solução de um problema:

Figura 2 - Os passos do ciclo da solução de problemas.



Fonte: Sternberg (2008, p. 367)

Sobre esses 7 passos vistos na Figura 2 acima, descreveremos a seguir sucintamente, as ideias de Sternberg (2008), para o ciclo de solução de um problema:

1. *Identificação do problema:* é um processo difícil, pois o indivíduo deve identificar que está diante de uma situação problema. Desta maneira, "Podemos não ser capazes de reconhecer que temos um objetivo. Por exemplo, podemos precisar sair do caminho de um carro que se aproxima, mas não conseguir vê-lo. Ou podemos não reconhecer que nosso caminho até um objetivo está obstruído" (STERNBERG, 2008, p. 367).

2. *Definição e representação do problema:* Após identificar que o problema existe, é necessário ter sua definição e representação de modo que seja possível sua resolução. Definir um problema é um passo determinante e, se sua representação for imprecisa, a capacidade para encontrar sua solução será sobremaneira reduzida.

3. Formulação da estratégia: após a identificação do problema, o passo seguinte é realizar um planejamento estratégico para sua resolução. Isto pode ser feito por meio de

uma análise desmembrando um problema complexo em elementos menores que facilitem seu gerenciamento. Por outro lado, também pode-se usar uma complementação de síntese, isto é, aglutinando mais elementos de modo a organizá-los em uma estratégia mais eficaz.

4. *Organização da informação:* Neste passo, deve existir a tentativa de integração das informações que se acreditam serem necessárias para se encontrar a solução. É uma etapa crucial para que se encontre uma solução adequada. Sternberg (2008, p. 369) acusa que "Às vezes, as pessoas não são capazes de resolver um problema não porque não consigam, mas porque não se dão conta das informações que tem ou de como elas se encaixam".

5. *Alocação de recursos:* Existem problemas que requerem grande parcela de tempo e de outros recursos, já outros demandam pouca. Neste contexto, se faz necessário sabermos quando e quais recursos devemos designar. Segundo Sternberg (2008, p. 369) os estudos apontam que os melhores alunos "tendem a dedicar mais de seus recursos mentais ao planejamento global (quadro geral) do que os novatos. [...] os estudantes eficazes têm menos probabilidades de ser vítimas de falsos começos, de caminhos tortuosos e de todos os tipos de erros".

6. *Monitoramento:* É o passo concomitante no qual ocorre a verificação se o caminho percorrido está se aproximando do objetivo planejado. Caso não esteja, é pertinente uma reavaliação do que está sendo feito, se houve um começo incorreto, um caminho inadequado ou vislumbrou-se uma estratégia mais promissora neste processo.

7. Avaliação: A solução do problema quando finalizada, deve ser avaliada. Esta etapa pode ser feita de imediato, um pouco ou muito mais tarde. Fechando este ciclo, temos que:

> Muitas vezes, avanços fundamentais acontecem no processo de avaliação, quando novos problemas podem ser reconhecidos. Além disso, o problema pode ser redefinido, e é possível que surjam novas estratégias. Novos recursos também podem tornar-se disponíveis ou os já existentes podem ser usados com mais eficiência. Dessa forma, o ciclo se completa quando leva a novas ideias e recomeça (STERNBERG, 2008, p. 369-370).

2.2.4 O processo de resolução de problemas de Proença

Proença (2018), tendo por base as ideias de Mayer (1992) e as quatro etapas sintetizadas por Brito (2010), buscou descrever estas etapas de resolução de problema, segundo sua interpretação da maneira como deveriam ser caracterizadas.

- *Representação:* esta é a etapa na qual o indivíduo compreende ou interpreta o problema buscando resolvê-lo. Envolve os conhecimentos linguísticos, pois com base na língua materna é que se traz à tona a estrutura geral do problema, ou seja, o reconhecimento das palavras. Além disso, exige-se os conhecimentos semânticos relativos ao conhecimento do aluno de termos matemáticos presentes no enunciado e como se relacionam. Por fim, os conhecimentos esquemáticos é que permitirão reconhecer a natureza do problema baseado em conteúdos e algoritmos matemáticos aprendidos de antemão. Assim é possível diferenciar se o problema é de geometria, de álgebra, de análise combinatória etc.
- *Planejamento:* é o momento de se pensar em uma estratégia de resolução para o problema. Abarca o conhecimento estratégico que o indivíduo possui, sua organização e como vai representá-lo, traçando um caminho em busca da solução. Assim, Proença (2018, p. 28) aponta que o indivíduo poderá adotar uma "estratégia que segue o uso de conhecimentos lógico-verbais, viso-pictóricos (desenhos, figuras, diagramas) ou ambos".
- *Execução:* concernente a etapa na qual executa-se a estratégia planejada. Proença (2018) aponta que isso envolve que o estudante tenha um domínio dos procedimentos algorítmicos a serem utilizados, trazendo a luz sua capacidade para estabelecer relações espaciais e quantitativas por meio de seu pensamento lógico. Assim, por exemplo, se o planejamento da etapa anterior era resolver uma equação do 2º grau, nessa etapa o aluno deverá executá-la por meio da fórmula de Bháskara ou do complemento de quadrados ou outros procedimentos que o levem a alcançar o seu objetivo.
- *Monitoramento:* necessita que o aluno dê uma atenção especial a dois importantes aspectos: o primeiro, é verificar se a resposta encontrada é adequada ao questionamento do problema; e o segundo, rever o caminho de resolução percorrido. Este último propicia a pessoa a avaliação de suas habilidades de "reconstrução rápida e livre do raciocínio lógico matemático, isto é, se ela é capaz de refazer o que foi proposto como resolução" (PROENÇA, 2018, p. 28-29).

2.2.5 Considerações acerca do processo de resolução de um problema

Nas subseções anteriores vimos os processos de resolução um problema segundo as concepções de Polya (1994), Mayer (1992), Sternberg (2008) e Proença (2018). Desses autores, Sternberg (2008) apresenta o processo de resolução de problemas em um ciclo de sete estágios de resolução propondo etapas de modo a encontrar a solução de problemas de maneira geral. Já os demais autores, propuseram etapas para solucionar problemas matemáticos. O Quadro 1 a seguir mostra as etapas de resolução de problemas apontadas por esses autores e as similaridades:

Quadro 1 - Etapas de resolução de problemas.

Etapas / Autores	Polya (1994)	Mayer (1992)	Sternberg (2008)	Proença (2018)
Similaridades	Compreensão do problema	Representação do problema	- Identificação do problema. - Definição e representação do problema.	Representação
	Elaboração de um plano	Solução do problema (planejamento)	- Formulação da estratégia. - Organização da informação.	Planejamento
	Execução de um plano	Solução do problema (execução)	- Alocação de Recursos.	Execução
	Retrospecto	Solução do problema (monitoramento)	- Monitoramento. - Avaliação	Monitoramento

Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Quadro 1 podemos observar que o cerne das etapas de resolução de problemas está presente em todos os autores pesquisados. Assim, a etapa de compreensão de um problema de Polya (1994) é similar às etapas de representação de um problema de Mayer (1992), de identificação do problema e de definição e representação do problema de Sternberg (2008) e de representação de Proença (2018). Do mesmo modo, a etapa de elaboração de um plano de Polya (1994) é similar a etapa de solução de um problema (planejamento) de Mayer (1992), de formulação da estratégia e organização da informação de Sternberg (2008) e planejamento de Proença (2018). Já a etapa de execução de um plano de Polya (1994) tem similaridades com a etapa de solução de um problema (execução) de Mayer (1992), de alocação de recursos de Sternberg (2008) e de execução de Proença (2018). Por fim, a etapa de retrospecto de Polya (1994) é similar a etapa de solução do problema (monitoramento) de Mayer (1992), às etapas monitoramento e avaliação de Sternberg (2008) e de monitoramento de Proença (2018).

Dentro desse contexto, em nossa pesquisa adotaremos a perspectiva de Proença (2018) que é mais atual e segundo seu próprio autor tomou como base as ideias de Mayer (1992). Tais concepções exploram a resolução de problemas matemáticos sobre a ótica de conhecimentos específicos (linguístico, semântico, esquemático, estratégico e procedimental) a qual acreditamos serem importantes para o processo de ensino aprendizagem que buscaremos implementar com nossa proposta de organização de ensino.

2. 3 A resolução de problemas para ensinar matemática

Para Flemming, Luz e Mello (2005), quando falamos em Tendências na Educação Matemática, estamos falando de estratégias ou propostas metodológicas para o Ensino da Matemática. Tais propostas norteiam o trabalho do professor, representando uma preocupação com aluno, o qual tem papel central no processo, opondo-se ao sistema no qual o aluno é espectador que recebe o conhecimento de forma passiva. Quando usamos uma tendência no processo de ensino e aprendizagem, professores e alunos podem vivenciar formas diferentes de ensinar e aprender Matemática. Para tanto, a tendência escolhida por nós para este trabalho será com foco na RP.

A RP é uma tendência em educação matemática indicada nos Parâmetros Curriculares Nacionais do EF – PCNs (BRASIL, 1998). Tal documento, quando em vigor, propunha o uso da RP de modo que auxilie o estudante a compreender os conceitos e algoritmos matemáticos. É ainda sugestionado a utilização do problema como ponto de partida ao invés da definição pronta de um conteúdo matemático.

Já a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) orienta-nos que o foco para o ensino da Matemática por meio da RP deve encaminhar o aluno na articulação de diferentes campos matemáticos como a Aritmética, Geometria, Álgebra, Estatística e Probabilidade e Grandezas e Medidas. É proposto assim que o indivíduo desenvolva suas habilidades para que tenha êxito ao agir matematicamente em diferentes situações objetivando deste modo sua autonomia na tomada de decisões.

Entretanto, Proença, Campelo e Santos (2022) apontam que a BNCC não traz a RP como forma de ensino e afirmam que as habilidades indicadas de “resolver e elaborar problemas”, “resolver problemas” e mesmo “para resolução de problemas” evidenciam um posicionamento da BNCC no qual o ensino está preocupado apenas em levar os alunos a aplicação e/ou utilização da Matemática estudada em sala de aula. Além disso, esse documento não traz

sugestões sobre como deve ocorrer a abordagem de ensino por meio da RP de modo a levar os estudantes a aprenderem Matemática. Sobre esse fato, os autores defendem que "se a resolução de problemas for integrada ao currículo, então deve ser entendida como estratégia de ensino e aprendizagem, e não simplesmente para aplicar conteúdos" (PROENÇA; CAMPELO; SANTOS, 2022, p. 17).

A BNCC (BRASIL, 2018) e a literatura atual citam ainda a perspectiva de ensino e aprendizagem por meio da proposição de problemas – PP. Sobre este tema, Zhang e Cai (2021, p. 02) sustentam que a "proposição de problemas matemáticos é o processo de formular e expressar um problema dentro do domínio da matemática".

Nesse panorama, Possamai e Allevato (2021) ao revisarem a literatura desse tema apontam que a PP traz contribuições como: a promoção da compreensão conceitual; o desenvolvimento da capacidade de raciocínio e de comunicação matemática do aluno; o aumento do interesse pela matemática; o fomento para criação e autonomia; a conexão da matemática com interesses individuais dos estudantes; e, uma melhora em processos de leitura, interpretação e compreensão de problemas pelos estudantes. Em virtude dessas benesses, Martins e Andrade (2023, p. 08) afirmam que a PP "é um tema emergente na Educação Matemática que vem ganhando nos últimos anos vasta proporção em termos de pesquisas e práticas educativas, tendo destaque em eventos e publicações". Nesse sentido, os autores afirmam ainda que essa abordagem de ensino e aprendizagem são de grande interesse para comunidades de pesquisa e de práticas no arcabouço da Educação Matemática.

Nesse contexto, Schroeder e Lester Junior (1989) descrevem três abordagens da RP para o ensino em sala de aula:

- Ensinar *sobre* a RP - baseada nas etapas de Polya (1994). Tal abordagem de ensino inclui tanto o trabalho com heurísticas e estratégias de resolução como a experiência do estudante para resolver problemas. Resumidamente, o ensino sobre está atrelado a discussão de como os problemas são resolvidos (SCHROEDER, LESTER JUNIOR, 1989).
- Ensinar *para* RP - na qual o professor trabalha a habilidade do aluno em transferir o que aprende para outras situações. Assim, "[...] a única razão para aprender matemática é ser capar de usar o conhecimento adquirido para resolver problemas" (SCHROEDER; LESTER JUNIOR, 1989, p. 32).
- Ensinar *via/através* da RP - nesta abordagem "o ensino de um tópico matemático começa com uma situação problema que expressa aspectos-chave desse tópico"

(SCHROEDER, LESTER JUNIOR, 1989, p. 32). Desta maneira, o problema é o ponto de partida para o ensino em sala de aula, permitindo ao aluno construir os conceitos matemáticos e apenas depois é que o professor formaliza tais conceitos.

Sobre estas três abordagens, Schroeder e Lester (1989) observam que o ensino *sobre* a resolução de problemas tem como foco apenas um tópico matemático ensinado de maneira isolada preterindo outros conteúdos matemáticos.

Por outro lado, o ensino *para* RP é visto como limitado haja vista que os alunos só se engajam em uma atividade após a introdução de um novo conceito para em seguida desenvolver suas habilidades para calcular (SCHROEDER, LESTER JUNIOR, 1989). Dando embasamento a este contexto, o trabalho de Proença e Maia-Afonso (2020) apontou estudos nos quais ocorreram esta abordagem de ensino e que evidenciaram para concepção de apenas resolver problemas, assim os conceitos matemáticos eram dados de forma direta ao invés de serem formados partindo dos problemas.

Todavia, em relação a abordagem de ensino *via/através* da RP, Schroeder e Lester Junior (1989) destacam que "[...] é uma concepção que não tem sido adotada, quer implicitamente, por muitos professores, autores de livros e desenvolvedores de currículo, mas é uma abordagem do ensino de matemática que merece ser considerada, desenvolvida, tentada e avaliada (SCHROEDER, LESTER JUNIOR, 1989, p. 34). Trabalhos como de Matsuda (2017) e Sousa e Proença (2019) mostraram que a implementação desta abordagem de ensino contribuiu para a aprendizagem de Matemática pelos alunos.

Dentro da literatura para o trabalho do professor nessa abordagem de ensino via/*através* da RP, no âmbito nacional, podemos citar Onuchic *et al.* (2019) que dissertam sobre 10 etapas para sua prática em sala de aula, a saber: 1 - proposição do problema; 2 - alunos em grupo são desafiados a utilizar seus conhecimentos prévios; 3 - os alunos nos grupos discutem e aprimoram sua compreensão; 4 - o professor observa, incentiva e os auxilia em problemas secundários; 5- os alunos resolvem o problema; 6 - os alunos registram as resoluções na lousa; 7 - em plenária, discutem as resoluções obtidas; 8 - professor e alunos chegam a um consenso sobre a resolução; 9 - o professor formaliza o "novo" conteúdo; e 10 - ocorre a proposição de novos problemas.

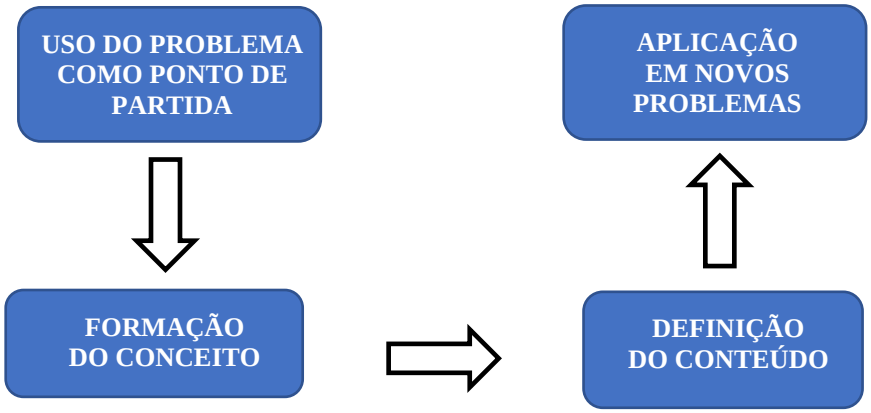
Outra possibilidade do trabalho na abordagem de ensino *via/através* da RP é a de Proença (2021), cujo viés busca trabalhar o ensino para aprendizagem de conceitos matemáticos por meio da RP, baseando-se em quatro etapas: 1 – uso do problema como ponto de partida; 2 – formação do conceito; 3 – definição do conteúdo; e 4 – aplicação em novos problemas. Nessa

proposta de Proença (2021) vemos similaridades da etapa 3 - *definição do conteúdo* com a etapa 9 - *o professor formaliza o "novo" conteúdo* proposta por Onuchic *et al.* (2019), porém nesse último os autores não se preocupam com o trabalho conceitual de conteúdos matemáticos na abordagem de ensino. Dessa forma, para o presente estudo, optamos pela proposta de abordagem de ensino de Proença (2021) tendo em vista os objetivos propostos para nossa questão de pesquisa e por acreditarmos que o trabalho com conceitos matemáticos pode contribuir para sanar as dificuldades de ensino e aprendizagem concernentes ao conteúdo de SL. Sobre a proposta de trabalho de Proença (2021) é que dissertaremos na próxima seção.

2.4 Organizando o ensino de conceitos matemáticos por meio da resolução de problemas: a proposta de Proença (2021)

Proença (2021) propõe uma organização para o ensino de conceitos matemáticos de uma forma estruturada baseada em etapas correspondentes a uma sequência de aulas a ser implementada pelo professor em seu trabalho escolar em sala de aula. As etapas são, em ordem: 1) Uso do problema como ponto de partida; 2) Formação do conceito; 3) Definição do conteúdo; 4) Aplicação em novos problemas. A Figura 3 a seguir, esquematiza essa organização de ensino:

Figura 3 - Estrutura da organização de ensino.



Fonte: Proença (2021, p. 08)

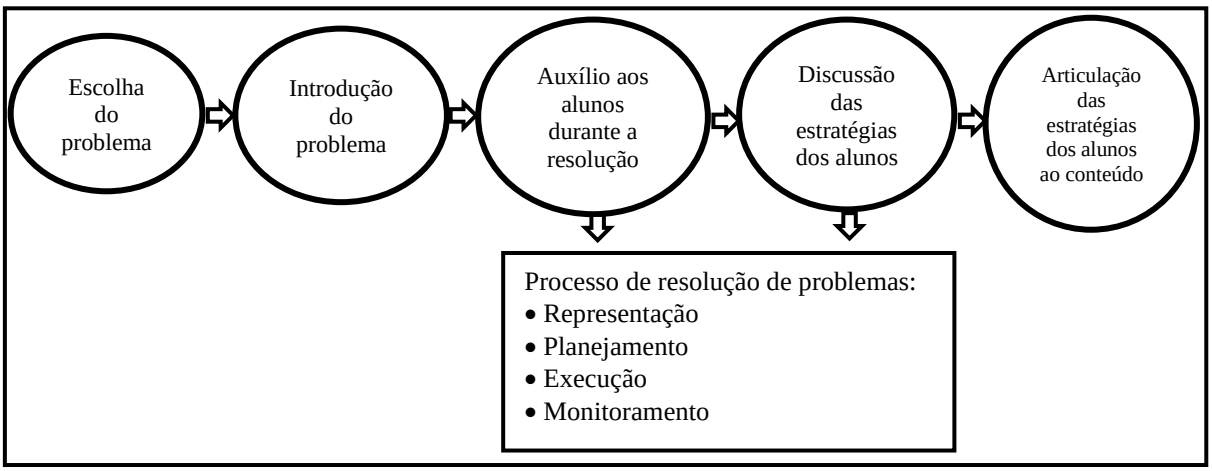
Nas próximas subseções, trataremos acerca da organização de ensino para aprendizagem de conceitos matemáticos por meio da RP proposto por Proença (2021). Cada

subseção explanará sobre os principais pontos de cada uma das quatro etapas propostas pelo autor.

2.4.1 Uso do problema como ponto de partida

Tal etapa é aquela na qual o professor faz uso de uma situação de matemática que poderá ser um possível problema a ser adotado como ponto de partida de modo que venha fazer a introdução de um novo conteúdo/conceito/assunto matemático. Para auxiliar o docente no planejamento e orientá-lo na elaboração das aulas neste processo, optamos pelas cinco ações propostas por Proença (2018) para o que denominou de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EMAvRP), conforme a Figura 4 abaixo:

Figura 4 - Esquema de trabalho por meio da sequência de ações.



Fonte: Proença (2018, p. 46).

Sobre as ações da Figura 4 é o que descreveremos a seguir:

• *Escolha do problema:* A escolha do problema, deve ter atenção a três importantes aspectos:

> O principal. [...] em direcionar os alunos a usar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos aprendidos anteriormente. [...] O segundo, [...] é justamente levá-los a construir o conteúdo/conceito/assunto a ser introduzido. [...] O terceiro (...) propiciar que os alunos estabeleçam relações entre os conhecimentos matemáticos utilizados e entre estes e o novo conhecimento (PROENÇA, 2018, p. 46).

Para Proença (2018), nessa ação, o docente deve buscar situações de matemática dando preferência aquelas que possuírem mais de uma resposta, objetivando que os estudantes

compreendam que a resolução de um problema não implica em uma única resposta. Deste modo, os alunos podem entender que a resposta que encontrarem deve ser analisada em racionalidade com o contexto da situação matemática. Além disso, o professor deve conhecer previamente as possibilidades de estratégias de resolução, como por exemplo: por tentativa e erro, desenhos de figuras, uso de casos particulares, busca de processos de generalização, trabalho inverso, simulação e experimentação, dedução lógica e representação de dados como gráficos, equações, expressões algébricas, diagramas, quadros e tabelas.

Dentro do processo de escolha do problema, Proença (2018) aponta algumas possibilidades que facilitam o trabalho do professor para esse momento: a) a escolha de um problema na íntegra: quando o docente pode escolher um problema retirado na íntegra de um livro didático ou similares; b) a escolha de um problema elaborado: referente aquela na qual se elabora um problema que facilite a introdução de um conteúdo/assunto/conceito matemático; c) escolha de um problema reelaborado: nesse o professor escolhe o problema de um livro didático ou similar e faz alterações que julgar necessárias para que o problema alcance seus objetivos pedagógicos para as ações de ensino posteriores; e, por fim, d) escolha do problema envolvendo a busca de um padrão: nesse escolhe-se o problema que "ajuda a levar os alunos a desenvolver um processo de pensamento baseado na generalização" (PROENÇA, 2018, p. 68).

- *Introdução do problema:* esta segunda ação é aquela na qual ocorre o contato do professor com os alunos em sala, sugerindo que uma divisão dos estudantes em grupo. Isso permite que os indivíduos compartilhem os conhecimentos e experiências que aprenderam anteriormente. Neste momento, o professor deve indicar que os discentes tentem resolver como quiserem ou como acharem mais conveniente, usando seus conhecimentos matemáticos conhecidos. É neste momento que a situação de matemática apresentada pode configurar como um problema e o docente entra em cena com a próxima ação da abordagem de ensino.
- *Auxílio aos alunos durante a resolução:* Nesta ação, o professor deve auxiliar os alunos sobre suas dúvidas mais frequentes, interpretações errôneas dos dados da situação matemática e da racionalidade da resposta obtida por eles durante a resolução, ou seja, o professor deve avaliar seus alunos nas etapas de resolução de problemas. Proença (2018, p. 51) aponta que "o papel do professor no auxílio dos grupos é de observador, incentivador e direcionador da aprendizagem, apoiando os alunos a desenvolver autonomia frente ao processo de resolução". Durante essa ação, o docente pode verificar as dificuldades e motivação dos grupos em busca da solução e pode

auxiliá-los por meio de estratégias que tenham sido elaboradas de antemão na primeira ação (Escolha do problema).

- *Discussão das estratégias dos alunos:* é um momento importante de socialização da resolução para que os grupos "possam perceber e construir relações entre os conhecimentos que utilizaram. "[...] O professor deve apontar dificuldades e equívocos cometidos numa resolução inadequada. [...] Deve-se, contudo, levar os alunos a sintetizar o que aprenderam" (PROENÇA, 2018, p. 52).
- *Articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo:* nesta última ação, busca-se a articular as estratégias dos estudantes ao conteúdo/conceito/assunto matemático que se quer introduzir. Sobre essa ação, o autor faz alguns apontamentos:

> [...] o papel do professor é utilizar pontos centrais de uma estratégia e relacioná-la ao conceito ou a uma expressão matemática (fórmula, algoritmo etc.). Caso não seja possível tal articulação, pode-se apresentar a resolução do problema de forma direta (PROENÇA, 2018, p. 52).

Observamos ainda na Figura 4 que as ações de *auxílio aos alunos durante a resolução* e *discussão das estratégias dos alunos* permeiam as etapas de resolução de um problema (representação, planejamento, execução e monitoramento) propostos por Proença (2018) e são nessas ações que os estudantes possivelmente desenvolverão as etapas de resolução do problema proposto.

2.4.2 Formação do conceito

Ato contínuo após os estudantes terem contato com o novo conteúdo e se habituarem com a representação matemática inerente a eles, é o momento de se levá-los a formarem o conceito. Isto ocorre por meio da aprendizagem e do desenvolvimento da compreensão deste conceito.

Segundo o dicionário on-line de português (CONCEITO, 2021), a palavra conceito faz referência "ao modo de pensar, a noção, concepção ou percepção que alguém possui sobre algo" Klausmeier e Goodwin (1977) advogam que os conceitos como *construtos mentais* são inerentes a construção da aprendizagem de cada pessoa, já os conceitos enquanto *entidades públicas* constroem-se juntos a informação organizada assim como estão dispostas em livros, por exemplo. Deste modo, Klausmeier e Goodwin (1977, p. 312) nos orientam que o conceito é inerente a "informação ordenada sobre as propriedades de uma ou mais coisas - objetos,

eventos ou processos – que torna qualquer coisa ou classe de coisas capaz de ser diferenciada de ou relacionada com outras coisas ou classes de coisas". Exemplificando ao contexto matemático, podemos dizer conceitualmente que uma equação do 2º grau se diferencia de uma equação do 1º grau devido ao fato da variável de maior grau ter expoente igual a 2. Diante disso, Proença (2021, p. 04) afirma que "deve-se partir de alguns exemplos e não exemplos e elaborar uma atividade para envolver os alunos na identificação de características que fazem parte do conceito".

Reforçando estas ideias, Pozo (1998) aponta que os conceitos ensinados aos estudantes devem partir de uma avaliação tendo por base a aprendizagem significativa, permeando os seguintes objetivos: i) levar os alunos a elaboração da definição do significado de conceito; ii) serem capazes de fazerem o reconhecimento da definição do conceito que sabem quando se depararem com diferentes possibilidades; iii) terem habilidades para escreverem sobre um assunto que envolva o conceito apresentado; iv) realizarem a identificação e categorização de situações acerca do conceito; e v) utilizar o conceito para resolverem problemas.

Para que isso ocorra efetivamente, Proença (2021, p. 09) afirma que "o professor deve propor atividades que levem os alunos a compreenderem propriedades e/ou características do conceito, possibilitando que consigam diferenciá-lo de outros conceitos matemáticos". Para isso, o autor enumera alguns pontos que devem ser observados nas atividades a serem propostas em sala de aula e que devem levar os estudantes:

> a) explorarem exemplos e não exemplos do conceito para explorar suas características; b) apresentarem uma definição para o conceito (construto mental), o que evidenciará as características do conceito que eles mencionam; c) apresentarem outros tipos ou variações do conceito, ou seja, apresentar exemplos do conceito; d) apresentarem não exemplos do conceito, o que permite ampliar a compreensão conceitual, pois, por exemplo, para saber o que é uma equação de segundo grau, também é importante saber o que não é (PROENÇA, 2021, p. 09).

Dentro desse contexto de formação conceitual, Gagné (1973) reforça que a aprendizagem conceitual é dependente de cada indivíduo de modo que

> [...] quanto mais sólidas forem as bases em que uma capacidade tiver sido aprendida, maior probabilidade terá de ser transferida a situações novas e diferentes. De acordo com isso, a utilidade de qualquer capacidade aprendida crescerá, se ela for utilizada em muitas situações, tantas quanto possível (GAGNÉ, 1973, p. 211).

Nesse sentido, Proença (2021, p. 04) defende a importância da compreensão de que os conceitos sobremaneira sejam bem formados no movimento do construto mental à entidade pública. Para o autor, “se isso ocorrer, será oportuno levar os alunos a ampliarem suas compreensões dos conceitos matemáticos quando da abordagem de novas situações e sob o olhar da perspectiva da resolução de problemas” (PROENÇA, 2021, p. 04).

Terminada a etapa de *formação do conceito,* chegamos à etapa de *definição do conteúdo,* a qual explanaremos na subseção a seguir.

2.4.3 Definição do conteúdo

Este momento diz respeito a etapa de definição dos conceitos matemáticos e dos processos algorítmicos para resolver o problema. Para Proença (2021, p. 09), “Isso implica em abordar tanto a definição do conceito matemático (entidade pública) quanto os procedimentos algorítmicos de resolução”. O autor ilustra a definição do conceito por meio do conteúdo equação de 2.º grau: apresentar a definição matemática do que seria uma equação desse tipo, apontando suas características e diferentes representações. Para tal, o autor destaca que outro ponto importante é:

> Nesta etapa, é importante o professor estabelecer a relação entre a linguagem matemática envolvida e a linguagem que foi utilizada pelos alunos quando das atividades de formação conceitual (etapa 2) no sentido de debater coletivamente sobre seus entendimentos da estrutura matemática e realizar a síntese entre as representações (exemplos e não exemplos) que foram utilizadas (PROENÇA, 2021, p. 09)

Deste modo, os estudantes constroem a compreensão da linguagem simbólico-formal. Para que isto aconteça, se faz necessário que os discentes aprendam diferentes perspectivas algorítmicas de resolução de maneira que o entendimento do conteúdo abordado seja ampliado (PROENÇA, 2021).

É nessa etapa que os alunos terão contato com os procedimentos matemáticos necessários para a compreensão e entendimento da definição do conteúdo. Nesse sentido, o aluno terá contato com definições formais, fórmulas e cálculos matemáticos sendo indispensável abordar os conteúdos procedimentais. Para Zabala (1998, p. 43), o conteúdo procedimental abarca “as regras, as técnicas, os métodos, as destrezas ou habilidades, as estratégias, os procedimentos – é um conjunto de ações ordenadas e com um fim, quer dizer,

dirigidas para a realização de um objetivo". O autor aponta que os conteúdos procedimentais compreendem atitudes como desenhar, ler, classificar, calcular e traduzir fatos.

Coll e Valls (1998, p. 77) corroboram com essas ideias ao afirmarem que os conteúdos procedimentais são "[...] ações ou decisões que compõem a elaboração ou a participação [...]" que nos orientam para concretização de uma meta estabelecida. Sobremaneira, os autores salientam que:

> Os conteúdos procedimentais designam conjuntos de ações, de formas de agir e de chegar a resolver tarefas. Trata-se de conhecimentos referentes ao saber fazer coisas (com as coisas ou sobre as coisas, as pessoas, a informação, as ideias, os números, a natureza, os símbolos, os objetos, etc.). [...] fazem referências às ações para solucionar problemas, para chegar a objetivos ou metas, para satisfazer propósitos e para obter novas aprendizagens (COLL; VALLS, 1998, p. 92).

Dessa forma, com os autores supracitados, vemos a importância da atenção do docente na abordagem de ensino de modo que seus alunos alcancem com sucesso a aprendizagem dos conteúdos procedimentais que são necessários seja para um conteúdo aritmético ou algébrico. A próxima subseção tratará da etapa de *aplicação em novos problemas,* última etapa da organização de ensino proposta por Proença (2021).

2.4.4 Aplicação em novos problemas

Segundo Proença (2021), nesta etapa o professor deve elaborar suas aulas embasadas no uso de diferentes e novas situações que envolvam novos problemas ou possíveis problemas, objetivando transferir a aprendizagem dos estudantes do conceito matemático e dos procedimentos algorítmicos aprendidos. Tal etapa, abarca o ensino *para* RP, entretanto com um trabalho decorrente da formação conceitual. Para o autor, as situações a serem trabalhadas deverão ser contextualizadas e oriundas do dia a dia social, político, econômico e de diferentes áreas das ciências. Além disso, devem compor-se de informações completas, incompletas e supérfluas em seus enunciados. Ao longo das aulas, pode ocorrer que os estudantes se vejam em dificuldades na busca da resolução das novas situações, reconhecendo-as como problemas. Isso poderá acontecer em razão da necessidade de mobilizarem conhecimentos matemáticos (semânticos), mas ainda dos conhecimentos linguísticos e dos conhecimentos derivados de suas perspectivas de mundo. Todo este contexto exige uma reorganização cognitiva dos discentes referente tanto do conceito atual que está sendo aprendido, quanto de conceitos já estudados.

Este panorama, é ocasionado pelo fato de cada nova situação trazer consigo palavras e/ou termos que demandam uma complexidade para que sejam traduzidas para uma linguagem matemática. Para que haja êxito nesta etapa:

> [...] o professor deve observar e sanar: a) as dificuldades dos alunos no processo de resolução de problemas (representação, planejamento, execução, monitoramento); b) suas dificuldades na relação entre os contextos das situações e a identificação e representação do conceito matemático, quando realizam a compreensão do problema (representação do problema). Trata-se, assim, de levar os alunos a realizar a ressignificação do conceito matemático em meio às situações contextualizadas que são trazidas para o ensino em sala de aula (PROENÇA, 2021, p. 10-11).

Em síntese, em sua proposta de organização de ensino com resolução de problemas para aprendizagem de conceitos matemáticos, Proença (2021) evidencia que: a primeira etapa do problema como ponto partida visa valorizar os conhecimentos que o aluno já tem vinculando-os com o novo conceito, oferecendo possibilidades para que desenvolva a abstração; a segunda etapa de formação de conceito, busca que o indivíduo seja capaz de identificar características e modos de representar do conceito, dando exemplos e não exemplos; chegando a terceira etapa de discussão coletiva de definição do conteúdo para que o estudante aprenda a linguagem simbólico-formal do conteúdo; por fim, a última etapa proposta de aplicação em novos problemas, tem como prerrogativa a significação da aprendizagem, haja vista que as novas situações trazem a necessidade que os conceitos estejam bem formados fazendo que sejam ampliados e ressignificados em diferentes contextos.

2.5 Ensino de sistemas lineares por meio da resolução de problemas: um panorama de teses e dissertações

Objetivando verificar a produção acadêmica sobre o tema de ensino de SL por meio da RP, fizemos uma busca na literatura que pudesse servir de auxílio na melhoria das ações da metodologia de pesquisa proposta para nosso trabalho. Para tanto, consultamos os bancos de dados das seguintes plataformas:

- BDTD[4] – Biblioteca Digital de Teses e Dissertações mantida pelo IBICT - Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia.

[4] Disponível em: https://bdtd.ibict.br/vufind/. Acesso em: 21 dez. 2021.

- CTD[5] - Catálogo de Teses e Dissertações da Capes[6].

As buscas abarcando essas duas plataformas são importantes à medida que nos trazem luz em relação a teses e dissertações já publicadas desenvolvidas no âmbito nacional. Desse modo, acreditamos que as pesquisas que envolverem o tema de ensino na abordagem da RP com o conteúdo de SL poderão servir de referências também para a análise e discussão dos dados de nossa metodologia afim de cercear diferenças, relações e aproximações com o que encontrarmos na fase de coleta de dados. O Quadro 2 abaixo, nos mostra as 4 buscas realizadas nas bases de dados BDTD e na CTD, com as palavras-chaves, as especificações de busca e os resultados obtidos:

Quadro 2 – Quadro síntese dos resultados obtidos na BDTD e na CTD.

Base	Busca nº	Conjunto de Palavras-Chave	Especificações	Resultados
BDTD	1	"Resolução de Problemas" e "Sistemas"	Pesquisa em português. Palavras-chave no *título*. Sem limite temporal.	19
	2	"Resolução de Problemas" e "Sistemas"	Pesquisa em português. Palavras-chave no *assunto*. Sem limite temporal.	14
CTD	3	"Resolução de Problemas" e "Sistemas"	Pesquisa em português. Palavras-chave no *título, resumo* e *palavras-chave*. Sem limite temporal. Refinamentos: Tipo – *Mestrado e Doutorado*; Área do conhecimento - *Educação*.	928
	4	"Resolução de Problemas" e "Sistemas Lineares"	Pesquisa em português. Palavras-chave no *título, resumo* e *palavras-chave*. Sem limite temporal. Refinamentos: Tipo – *Mestrado e Doutorado*; Área do conhecimento - *Educação*.	546

Fonte: Elaborado pelo autor

De posse dos resultados obtidos, utilizamos para seleção das teses e dissertações, o critério que deveria constar no título da pesquisa a referência a um trabalho que dizia respeito ao ensino de SL por meio da RP. Em caso de dúvidas, eram realizadas a leitura do resumo de tal trabalho e, quando necessário, suas partes principais como objetivos, metodologia e conclusões. Consideramos ainda, os trabalhos tanto com foco de análise focada em professores quanto em alunos e ainda aqueles que contemplavam abordagens nos anos finais do EF, no EM e no ensino superior.

Nesse panorama, na base de dados da plataforma BDTD fizemos duas buscas no dia 21 de dezembro de 2021. A *busca 1* englobou os termos "resolução de problemas" e "sistemas"

[5] Disponível em: https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/. Acesso em: 21 dez. 2021.
[6] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

relativas a trabalhos que tivessem esses termos em seus títulos e sem limite temporal. Dentro desse contexto, foram encontrados 19 trabalhos, nos quais seguindo nossos critérios de seleção, chegamos a cinco dissertações: Andrade, F. J. (2013), Goulart (2014), Boccardo (2017), Martins (2019) e Silva, J. A. (2019). Já a *busca 2* abarcou as palavras "resolução de problemas" e "sistemas" pertencentes a trabalhos que tinham esses termos relativos a assuntos e sem limite temporal. Dessa maneira, o site nos retornou 14 trabalhos e seguindo nossos critérios de seleção e excluindo-se os trabalhos já encontrados na *busca 1*, chegamos a mais uma dissertação envolvendo o ensino de SL por meio da RP, a saber, Antoniassi (2013).

Realizando nossas buscas na base de dados do CTD da Capes, na *busca 3*, em pesquisa realizada no dia 04 de Janeiro de 2022, ao digitarmos na barra de busca entre as aspas os termos "resolução de problemas" e "sistemas", a plataforma nos retornou 217.949 trabalhos. Procurando um refinamento destes dados, usamos os filtros para: Tipo - *mestrado* e *doutorado* (independentes se acadêmicos ou profissionais) e Área do Conhecimento – *educação* chegando assim a um apontamento de 928 trabalhos. Porém, ao analisarmos individualmente via título os 928 trabalhos da *busca 3*, não obtivemos êxito em encontrar algum trabalho que estivesse de acordo aos nossos critérios de seleção, a não ser os trabalhos já encontrados nas *buscas 1* e *2*. Diante disso, realizamos a *busca 4* com os termos "resolução de problemas" e "sistemas lineares" utilizando os mesmos refinamentos nos filtros da *busca 3*. Dessa forma, chegamos à dissertação de Miranda (2014) que correspondia aos nossos critérios.

Tendo em mãos todas as dissertações selecionadas com o viés de ensino de SL por meio da RP, fizemos a leitura do resumo, objetivos, metodologia e conclusões destes trabalhos, os quais foram divididos em: i) dissertações que apresentavam propostas de ensino; e ii) dissertações com abordagens de ensino feitas em sala de aula. Sobre essas divisões e as descrições dos trabalhos encontrados, é o que discorrerá as próximas subseções.

2.5.1 Dissertações com propostas de ensino de sistemas lineares por meio da resolução de problemas

Nessa subseção apresentamos aquelas dissertações que encontramos na base de dados das plataformas da BDTD e CTD da Capes e que dizem respeito a propostas de ensino de SL por meio da RP. O Quadro 3 mostra o título, o autor, a abordagem de ensino (*sobre*, *para* ou *via/através* da RP), a natureza, a instituição e o ano das dissertações que apresentaram essa característica:

Quadro 3 - Descrição das dissertações que oferecem propostas de ensino de SL por meio da RP.

Título da dissertação	Abordagem	Autor (a)	Natureza	Instituição	Ano
Ensino de sistemas de equações lineares por meio da resolução de problemas	*Via/Através* da RP	ANDRADE, F. J.	Mestrado Profissional	UEL	2013
Sistemas lineares: aplicações e propostas de aula usando a metodologia de resolução de problemas e o software GeoGebra	*Sobre* RP *Para* RP	BOCCARDO, M. E.	Mestrado Profissional	UNESP	2017

Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Quadro 3, vemos primeiramente o trabalho proposto por Andrade, F. J. (2013). O autor destaca em seus referenciais teóricos, a proposta de ensino *via/através* da RP apresentada por Onuchic (1999). Todavia, observamos que seu estudo é focado em apresentar um conjunto de problemas resolvidos e comentados. Para Andrade, F. J. (2013), estes problemas podem ser usados na introdução ou decorrer das aulas para o ensino de SL *através* da RP. Mediante os problemas propostos, os estudantes podem traçar um plano de resolução como por tentativa e erro, desenhos, tabelas etc. Durante as ações de abordagem das atividades, o docente pode articular o ensino de algoritmos de resolução de SL como a Regra de Cramer, Método de Gauss-Jordan e da Eliminação Gaussiana. Andrade, F. J. (2013, p. 111) reforça que sua proposta de atividades teve "o intuito de proporcionar ao leitor uma reflexão sobre a metodologia do Ensino de Matemática [...] dando condições aos professores de repensarem suas práticas, colocando seus alunos em contato com situações cotidianas que possam instigá-los". Entretanto, constatamos que em sua dissertação o autor apresenta essa proposta, mas não realiza a aplicação com alunos em sala de aula.

O estudo de Boccardo (2017) apresenta o conteúdo de SL trazendo algumas de suas aplicações, métodos de resolução, a interpretação geométrica da solução de SL com duas e três incógnitas e como esse conteúdo deve ser abordado segundo documentos oficiais. Além disso, o autor descreve duas propostas de abordagem de ensino de SL para alunos do EF e EM: a primeira abarcando a abordagem de ensino *sobre* RP, na qual Boccardo (2017) apresenta duas situações problema e comenta como podem ser resolvidas usando as etapas de resolução de um

problema propostas por Polya (1994); e, a segunda, envolvendo a abordagem *para* RP, na qual qual faz uso da interpretação geométrica do conjunto solução de SL por meio do *software* GeoGebra. Mesmo não aplicando seu trabalho com alunos, Boccardo (2017, p. 80) destaca esperar "que as propostas de aula sirvam para motivar (e auxiliar) os professores do Ensino Básico a utilizarem a metodologia da Resolução de Problemas e recursos de Informática em suas aulas".

2.5.2 Dissertações com abordagens de ensino de sistemas lineares por meio da resolução de problemas realizadas em sala de aula

Essa subseção discorre sobre as dissertações encontradas nas bases de dados da BDTD e do CTD da Capes na qual o ensino de SL por meio da RP é feito por abordagens práticas em sala de aula. No Quadro 4 a seguir, podemos observar o título, o autor, a abordagem de ensino (*sobre*, *para* ou *via/através* da RP), a natureza, a instituição e o ano das dissertações que apresentaram a característica de terem sido pesquisadas em sala de aula:

Quadro 4 - Descrição das dissertações que descrevem abordagens feitas em sala de aula.

Título da dissertação	Abordagem	Autor (a)	Natureza	Instituição	Ano
O ensino de sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas no oitavo ano do EF através de situações-problema	*Para* RP	ANTONIASSI, K. R.	Mestrado Profissional	UFSCar	2013
Aplicações e resolução de problemas como metodologia para o ensino de sistemas lineares	*Para* RP	MIRANDA, L. B.	Mestrado Profissional	UFPI	2014
A aprendizagem significativa de sistemas de equações do 1º grau por meio da resolução de problemas	*Via/Através* da RP	GOULART, A. M. A.	Mestrado Acadêmico	PUC-SP	2014
Ensino-aprendizagem de sistemas lineares na formação do professor de Matemática via exploração, resolução e proposição de problemas	*Via/Através* da RP	MARTINS, F. C.	Mestrado Acadêmico	UEPB	2019
Resolução de problemas e representações múltiplas no ensino de sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas	*Via/Através* da RP	SILVA, J. A.	Mestrado Acadêmico	UEPB	2019

Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Quadro 4, observamos na pesquisa de Antoniassi (2013) uma abordagem de ensino *para* RP, na qual o autor buscou validar o ensino de sistemas de equações do 1º grau com seus alunos do 8º ano do EF por meio de situações-problema. A metodologia adotada por Antoniassi (2013) foi a da engenharia didática proposta por Carneiro (2005). Ao lermos a metodologia abordada na pesquisa, verificamos que o autor usa o ensino *para* RP. Para tanto, o docente explicou o conteúdo usando problemas e explanando a resolução destes aos estudantes por meio do método da adição, da substituição e da resolução gráfica. Para este último, adotou o material pedagógico *Prancha de Gráficos* e o *software* GeoGebra. Como resultados, Antoniassi (2013, p. 50) infere que "através de atividades trabalhadas com os alunos, respeitando uma sequência didática, como a metodologia da RP pode auxiliar na construção de uma proposta didático-pedagógica para o ensino e a aprendizagem da Matemática" sobretudo quando abordada de maneira paciente e com sensibilidade com os alunos do EF.

Do trabalho de Miranda (2014) podemos observar que o autor dá destaque a situações problemas que relacionam o conteúdo de SL ao cotidiano, enfatizando suas aplicações numa abordagem de ensino *para* RP. São apresentadas quatro situações problemas, as quais o autor comenta suas etapas de resolução embasadas no modelo de Polya (1994) e abarcando sistemas de equações lineares com três incógnitas. Miranda (2014) também apresenta um conjunto de atividades desenvolvidas por seus 77 alunos em 3 turmas de 7º ano do EF. Como resultado, o autor destaca que os alunos melhoraram o processo de aprendizagem de SL o que corroborou com o aumento da média das turmas conforme avaliações escritas eram aplicadas no decorrer do bimestre letivo.

A pesquisa de Goulart (2014), buscou investigar o ensino e a aprendizagem de sistemas de equações de 1º grau com alunos do 8º ano do EF. Para tanto, fez o uso do ensino através da RP proposto por Walle (2009) e Onuchic e Allevato (2011) aliado aos princípios da aprendizagem significativa de Ausubel (1968). A autora trabalhou com 4 turmas de 8º ano, analisou o protocolo (folhas de atividades devolvidas) de 16 estudantes durante 12 sessões (aulas de 50 minutos). As aulas apresentaram uma sequência didática que trabalhava com o problema como ponto de partida para o conteúdo matemático a ser estudado, apontando assim para uma abordagem de ensino *via/através* da RP do conteúdo de sistemas de equações com duas incógnitas. Goulart (2014, p. 73) aponta que buscou analisar "se os alunos utilizaram seus conhecimentos prévios durante a resolução das atividades e se a aprendizagem foi significativa após a finalização da sequência". Ao final das análises, verificou-se que a metodologia aplicada,

juntamente com os princípios de aprendizagem significativa foram eficazes na construção do conhecimento do conteúdo de sistemas de equações do 1º grau. Isso ficou evidenciado, quando os estudantes se depararam posteriormente com atividades envolvendo situações que para serem resolvidas requeriam a utilização de sistemas de equações (GOULART, 2014).

Já Martins (2019), numa abordagem de ensino *via/através* da RP, em sua dissertação de mestrado, buscou desenvolver uma oficina com 10 sessões de 2 horas com estudantes do 5º período do curso de licenciatura em Matemática de uma universidade. Nessa oficina, a autora trabalhou atividades envolvendo SL propostas por Friedlander e Tabach (2001) e que foram abordadas por meio da metodologia de ensino e aprendizagem da Matemática através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas (ANDRADE, S. 1998; 2017). Para Andrade, S. (2017) tal metodologia tem uma perspectiva de ensino exploratório e investigativo, num entrelaçamento entre a resolução, proposição e exploração. Tal fato concede ao aluno a chance de explorar, elaborar várias reformulações (para que possa tirar o proveito máximo proporcionado pelo problema) e investigar o problema inicial para que possa desenvolver estratégias para resoulução em busca do caminho da solução almejada. Desse modo, Martins (2019) aponta que na aplicação de sua pesquisa, foi evidente a evolução dos alunos, principalmente na transição de representações, tendo em vista que os discentes começaram a fazer uso da linguagem matemática para resolver os problemas, preterindo a utilização da tentativa e erro como faziam no começo da oficina. Segundo a autora, seu estudo revelou que a metodologia de ensino e aprendizagem da Matemática através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas contribuiu para que os estudantes construíssem uma nova postura quando confrontados com o ensino de SL.

Silva, J. A. (2019) numa abordagem de ensino *via/através* da RP, estudou as potencialidades da RP juntamente com o uso das representações múltiplas no ensino de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas com alunos do 8º ano do EF. Seus referenciais teóricos foram Andrade, C. P. e Onuchic (2017) para a metodologia *através* da RP e Goldin e Shteingold (2001) e Friedlander e Tabach (2001) para as representações múltiplas. Por meio de um diário de campo e registros dos alunos, o autor verificou que nas ações de plenárias, consensos e formalização do conteúdo, o ensino via/*através* da RP contribuiu muito para a aprendizagem dos estudantes. Também foi observada a necessidade de ouvir os discentes no momento de exposição oral de suas representações verbais do que entenderam, buscando assim a melhoria da compreensão dos registros escritos na forma numérica, algébrica e gráfica. Isso permite a percepção se foram realmente assimiladas as ideias no processo de ensino. Entretanto,

Silva, J. A. (2019) destaca a necessidade ainda de se trabalhar mais e melhor o ensino e a aprendizagem dos métodos de resolução da adição, substituição e de representação gráfica dos sistemas de equação do 1º grau com duas incógnitas.

2.5.3 Considerações acerca das dissertações encontradas

Ao final do nosso levantamento das teses e dissertações nas bases de dados da BDTD e no CTD da Capes, os quais envolviam o ensino de SL por meio da RP, podemos verificar que foram encontrados apenas trabalhos de dissertações, sendo ausentes as pesquisas de teses de doutorado. Entre as dissertações elencadas, quatro eram de mestrados profissionais – Andrade, F. J. (2013), Boccardo (2017), Antoniassi (2013) e Miranda (2014) - e três de mestrados acadêmicos – Goulart (2014), Martins (2019) e Silva, J. A. (2019).

Dando um olhar aos níveis de ensino em que ocorreram as investigações das dissertações, verificamos que para o EF, foram encontradas quatro pesquisas: Miranda (2014) com abordagem feita com alunos do 7º ano; e, Antoniassi (2013), Goulart (2014) e Silva, J. A. (2019) com abordagens exploradas com estudantes do 8º ano. Já no EM, temos uma proposta de ensino *via/através* da RP trazida por Andrade, F. J. (2013) e outra proposta de ensino com abordagem *sobre* e *para* RP apontada por Boccardo (2017). Entretanto, essas duas dissertações ficam apenas no âmbito da proposta teórica e metodológica e não são verificadas suas eficácias em sala de aula. Por fim, no ensino superior, temos a dissertação de Martins (2019) que trabalha a formação inicial do ensino por meio da RP com estudantes de licenciatura em matemática.

Na dissertação de Goulart (2014) vemos o esforço de uma sequência didática que contribuiu sobremaneira para o ensino de SL com duas equações e duas incógnitas com alunos do 8º ano do EF. Em contrapartida, também com alunos desse ano escolar, podemos observar o trabalho de Silva, J. A. (2019) apontar para a necessidade de um trabalho que permita a melhoria de ensino e aprendizagem dos métodos resolutivos de um SL. Acreditamos, que uma sequência didática como fez Goulart (2014) pode contribuir para melhorar esse quadro dificultoso. É dessa forma que Martins (2019) até explora uma sequência didática por meio da exploração, resolução e proposição de problemas que é feita apenas com estudantes de licenciatura em matemática. Sobre esse estudo, embora englobe SL com duas ou três equações e duas ou três incógnitas não existe a investigação da eficácia dessa abordagem nem com alunos do EF nem com alunos do EM.

Outra coisa que nos chama a atenção, nas dissertações com aplicação em sala de aula é que poucas fizeram o apontamento de dificuldades dos alunos encontradas no trabalho do conteúdo de SL por meio da RP. Nesse sentido, apenas Martins (2019) aponta que seus alunos pesquisados tiveram dificuldades na transição da linguagem natural para linguagem algébrica ao se depararem com os problemas propostos. Dessa maneira, vemos uma lacuna em trabalhos de dissertações que busquem trazer apontamentos de dificuldades encontradas por estudantes no ensino de SL por meio da RP e, nesse sentido, vemos a importância da necessidades de teses que caminhem em estudos nesse sentido.

Nesse contexto de entraves postos até aqui, verificamos que não existem teses que envolvam o ensino de SL por meio RP tanto no EF, no EM e no ensino superior. Em se tratando de EM, as dificuldades podem ser potencializadas se considerarmos o ensino de SL com três equações e três incógnitas e os métodos resolutivos como o teorema de Cramer e o escalonamento. Quando olhamos as dificuldades de ensino de álgebra e sobretudo de SL elencadas nos nossos referenciais teóricos vemos a necessidade de um trabalho voltado a SL para o EM. Tal trabalho em nossa concepção, deve ser na forma de uma organização de ensino que permita o trabalho conceitual para o ensino de SL com alunos do EM por meio da RP. É nesse panorama que pretendemos trabalhar para responder à questão de pesquisa de nossa tese. Como foi feito o encaminhamento metodológico para chegar a essa resposta é o que descreveremos na seção a seguir.

3. METODOLOGIA

Nesta seção, vamos discorrer sobre a forma como nossa pesquisa foi desenvolvida. Para isso, apresentamos primeiramente a natureza e a modalidade concernentes aos aspectos relacionados com a metodologia de pesquisa qualitativa. Assim, apontamos os momentos de nossa investigação que correspondem a natureza e modalidade citadas e, em seguida, trazemos as justificativas para tal escolha. Em seguida, apresentamos: a descrição das fases e do desenvolvimento da pesquisa; o campo de pesquisa e os seus participantes; a proposta de organização de ensino por meio da RP; os instrumentos e técnicas de coletas de dados; os procedimentos de coletas de dados; e, por fim, os procedimentos de análise dos dados.

3.1 Natureza e modalidade da pesquisa

Esse trabalho é uma pesquisa de abordagem qualitativa. Para Souza e Kerbauy (2017), a pesquisa qualitativa busca apresentar, tratar e compreender os contextos sociais. Bogdan e Biklen (1994) sustentam que a pesquisa qualitativa é uma fonte de dados oriunda diretamente de um ambiente natural, na qual o investigador é o instrumento principal. Para esses autores, o processo nessa abordagem de pesquisa é tão importante quanto o resultado almejado. Além disso, a análise de dados é feita de modo indutivo e o seu significado é essencialmente importante.

Yin (2016) complementa esse conjunto de ideias apontando algumas particularidades da pesquisa qualitativa: a) ela aborda condições de vida real, estudando o significado da vivência das pessoas; b) permite entender a representação de perspectivas e opiniões dos indivíduos estudados; c) permeia o contexto em que as pessoas estão inseridas; d) revela conceitos que existem ou que são emergentes, os quais poderão auxiliar na explicação do comportamento social do homem; e) usa diferentes e variadas fontes de evidências preterindo o uso de uma única fonte. Para este autor, a pesquisa qualitativa por poder ser simultaneamente uma abordagem pragmática e adaptativa, vem tendo cada vez mais adeptos no mundo científico.

Uma das características relevantes de nossa pesquisa é que o autor desta tese é o professor que ministrou as aulas da proposta de ensino de SL aos seus próprios alunos. Como se trata de uma investigação própria do professor que atua na escola, adotamos a modalidade de nosso estudo como uma *Pesquisa Pedagógica*. Segundo Lankshear e Knobel (2008), a Pesquisa Pedagógica se conduz embasada na prática profissional do próprio docente, em que

os objetivos de pesquisa são oriundos de problemas percebidos ou já existentes e de questionamentos ou preocupações do próprio professor.

Lankshear e Knobel (2008) apontam dois objetivos e propósitos inerentes à pesquisa pedagógica. O primeiro é permitir que os professores melhorem sua percepção do seu papel e de sua identidade profissional. Já o segundo, é a melhoria da qualidade do ensino e aprendizagem em sala de aula causado pelo envolvimento com a pesquisa pedagógica. Contemporizando esses objetivos e propósitos, os autores destacam que:

> A pesquisa de professores é vista como um importante recurso, por meio do qual os professores podem desenvolver sua competência para fazer o autêntico tipo de julgamento autônomo e decisões adequadas a seu *status* como profissionais. [...] ela pode contribuir de forma demonstrável, para melhorar o ensino ou a formação de alunos. [...] É por meio de sua própria pesquisa que os professores podem ficar atentos ao seu método de ensino, e detectar o que faz com que os alunos tenham um menor rendimento, aprendendo menos do que poderiam. Com essa consciência, podem realizar mudanças criteriosas, colocá-las em prática e melhorar os resultados do ensino (LANKSHEAR; KNOBEL, p. 14, 2008).

Segundo Lankshear e Knobel (2008), os pesquisadores pedagógicos podem ser identificados como profissionais de sala de aula, englobando desde a pré-escola até o ensino superior. Estes profissionais podem estar envolvidos individualmente ou em grupos em investigações que visam ao aprimoramento da vocação de educador profissional. Isso tem envolvimento desde aspectos pessoais como a obtenção de uma satisfação pessoal, de valores, propósitos, direção e realização. Mas também aspectos profissionais como a melhoria da eficiência da própria prática de ensino.

Silva, J. A. (2019) ao refletir sobre as ideias dos autores acima, sustenta que a pesquisa pedagógica pode ser realizada no ambiente de sala ou em outro lugar, desde que permita ao pesquisador obter, analisar e interpretar as informações oriundas à orientação do professor-pesquisador. Segundo o autor, essa abordagem oportuniza o docente a reflexão de sua prática, possibilitando assim o seu crescimento enquanto profissional. Neste sentido, Lankshear e Knobel (2008) salientam que a pesquisa pedagógica além de envolver a observação do professor em sua sala de aula ou de outros colegas, também pode envolver:

> [...] a reflexão sistemática documentada e sobre as suas próprias experiências ou o engajamento com textos e questões teóricas ou conceituais; pode usar pessoas, textos de manuais, materiais da internet, conjuntos de dados secundários, e outros tantos, como fontes de informação; finalmente, pode ser fundamentada em dados do presente ou do passado e até mesmo em dados relacionados ao futuro. Seu escopo e variedade são enormes. (LANKSHEAR; KNOBEL, p. 18-19).

Para Lankshear e Knobel (2008), um ‘pesquisador sério’ não está interessado apenas em algo que esteja funcionando, mas busca entender como e por que funciona. Além disso, caso necessário, ele passará por uma adaptação para que funcione em outras circunstâncias ou para aplicação em outros casos.

3.2 Fases da pesquisa

Nossa pesquisa foi dividida em quatro fases, a saber: i) revisão de literatura; ii) elaboração da metodologia de pesquisa; iii) levantamento dos dados; iv) descrição e análise dos dados. É importante ressaltarmos que tais fases aconteceram em momentos diferentes, porém não necessariamente de forma cronológica. Nos próximos parágrafos, dissertaremos sobre essas fases e as ações que iremos desenvolver em cada uma delas.

Em relação à primeira fase, essa foi um momento dedicado a *revisão de literatura* dos pressupostos teóricos para que fosse possível situarmos a nossa questão de pesquisa e nossos objetivos. Concomitantemente, realizamos um levantamento de teses e dissertações produzidas com o mesmo viés de nossa investigação, ou seja, sobre o ensino de SL por meio da RP.

A segunda fase de *elaboração da metodologia de pesquisa*, já de posse dos estudos da primeira fase, elaboramos nossa metodologia de modo a responder nossa questão e objetivos de pesquisa. Primeiramente situamos a natureza e modalidade de nossa pesquisa, apontando como se dariam o seu desenvolvimento, o campo e os sujeitos a serem pesquisados. Em seguida, racionalizamos quais seriam as etapas e ações de nossa organização de ensino, bem como, os seus instrumentos e técnicas de coletas de dados e os procedimentos para análise desses dados.

Já a terceira fase de *levantamento dos dados* foi realizada pelo autor-professor-pesquisador por meio de 26 aulas de 50 minutos com 34 alunos do 2º ano do EM de uma escola pública. Nestas aulas foram feitas abordagens de nossa organização de ensino para aprendizagem de SL por meio da RP sendo feita a coleta de dados durante as ações de ensino.

Por fim, teremos a quarta fase de *descrição e análise dos dados* que ocorreu concomitantemente a terceira fase pois à medida que os dados foram coletados já foram feitas a descrição e análise desses dados. As inferências e intepretação de resultados foram realizadas por meio de eixos de análise tendo por norte os objetivos específicos propostos por nossa pesquisa. A subseção a seguir descreverá o campo e os participantes de nosso estudo.

3.3 Conhecendo o campo e os participantes da pesquisa

Essa pesquisa foi desenvolvida em uma escola da rede pública de ensino na cidade de Campo Mourão no Estado do Paraná. Tal escola foi fundada em 1952 pelo então governador Munhoz da Rocha Neto, sendo o primeiro grupo escolar da cidade funcionando inicialmente em uma casa de madeira cedida pela prefeitura municipal. Ao longo de sua história, o colégio já ofertou o EF, EM e cursos técnicos profissionalizantes. Desde o ano de 2021, a escola encontra-se no modelo cívico-militar adotada pelo governo estadual em alguns colégios mediante consulta pública.

Segundo o site do Governo do Estado do Paraná,[7] os colégios cívico-militares foram criados como uma modalidade de ensino da rede pública com foco na formação integral do aluno, visando uma excelência da educação e o desenvolvimento de hábitos saudáveis e de atitudes da vida social. Essa é uma proposta de uma parceria entre a Secretaria Estadual de Educação e Esporte e a Secretaria Estadual de Segurança Pública. O site complementa afirmando que "toda a parte pedagógica das instituições segue com os profissionais da Educação e militares do Corpo de Militares Estaduais Inativos Voluntários (CMEIV) que atuam na coordenação das atividades cívico-militares".

Com o advento desse modelo de ensino, a escola pesquisada passou a ofertar apenas os anos finais do EF e o EM com 6 aulas diárias de 50 minutos para cada turma. Foi incorporada à grade curricular a disciplina de Cidadania e Civismo no EF e no EM e a disciplina de Educação Financeira no EM. Entretanto, a instituição deixou de ofertar o ensino noturno e os cursos técnicos profissionalizantes foram transferidos para outra escola estadual do município.

Segundo o site do colégio (o qual manteremos em sigilo), ele está localizado na área central da cidade e atende uma clientela de nível sociocultural-econômico médio em sua maioria. Sobre sua ótima infraestrutura, o local possui uma área construída de 4 319 m² distribuídos em 9 blocos contendo: 19 salas de aula, cozinha, refeitório, sanitários, ginásio, quadra esportiva com grama sintética, área de circulação coberta, biblioteca, depósitos, salas de professores, direção e da equipe pedagógica. Destes espaços supracitados, o espaço da sala de aula foi o adotado para nossa investigação, na qual o professor e pesquisador ministra suas aulas para estudantes de 2º e 3º anos do EM.

O Projeto Político-Pedagógico da escola aponta que seus profissionais seguem a concepção sociointeracionista de Vygotsky (1999) embasada nas ações do homem no meio

[7] Disponível em: https://shortest.link/2LgT. Acesso em: 02 fev. 2022.

sociocultural. Além disso, outro documento norteador são as Diretrizes Curriculares da Educação Básica (PARANÁ, 2008) que sustentam uma concepção progressista apoiada na teoria crítica de currículo. É de se observar aqui, que o documento do Projeto Político Pedagógico dessa escola é de 2016 e está sendo reelaborado para que haja adequações de acordo com o modelo cívico-militar, a nova Base Nacional Comum Curricular e a nova matriz curricular do Estado do Paraná.

Os estudantes participantes da nossa pesquisa pedagógica serão 34 alunos (21 do gênero feminino e 13 do gênero masculino), com idades de 15 a 18 anos de uma turma de 2º ano do EM, a qual o professor pesquisador é o docente da disciplina de Matemática. A escolha desse ano letivo se deve ao fato do conteúdo de SL ser ministrado nesse ano/série conforme a grade curricular.

Durante a realização desta pesquisa, seguimos as exigências éticas de pesquisas com seres humanos. Dessa forma, os estudantes deverão assinar o TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e o TALE – Termo de Assentimento Livre e Esclarecido. O primeiro documento foi assinado pelos pais ou responsável legal, haja vista, que os alunos participantes são em quase sua totalidade, composta por menores de idade. Já o segundo documento que uma linguagem acessível aos estudantes legalmente menores e busca que sejam esclarecidos quanto a sua anuência em participarem da pesquisa sem prejuízo ao consentimento de seus responsáveis legais. Os dois documentos - TCLE e TALE - estão disponibilizados nos Apêndice A e B, respectivamente. Dentro contexto, serão preservados as identidades, imagens, áudios, falas e ações dos colaboradores de nossa investigação. Todo esse processo foi previamente acompanhado pelo COPEP – Comitê Permanente de Ética em Pesquisa com seres Humanos da Universidade Estadual de Maringá. O parecer consubstanciado concedido pelo órgão sob o número 5.716.066 encontra-se no Apêndice D ao final desse trabalho.

3.4 Proposta de organização de ensino por meio da resolução de problemas

Nossa pesquisa pedagógica teve sua coleta de dados realizada em 26 aulas de matemática nos meses de julho, agosto e setembro de 2022 com 34 alunos do 2º ano do EM de uma escola pública de uma cidade do centro-oeste do Estado do Paraná. As aulas fizeram parte do 2º trimestre do ano letivo a qual os estudantes participaram e dissertaram sobre o ensino do conteúdo de SL por meio da RP. A princípio planejamos 18 aulas de 50 minutos, 2 situações matemáticas e 24 atividades conforme o cronograma que pode ser visto no Quadro 5 abaixo:

Quadro 5 – Cronograma das atividades a serem realizadas em sala de aula.

Etapas de Proença (2021)	Aulas	Conceito/assunto/conteúdo matemático a ser ministrado	Atividades solicitadas
Uso do problema como ponto de partida	1, 2, 3 e 4	• Sistemas lineares com 3 equações e 3 incógnitas	Resolver as Situações 1 e 2
Formação do Conceito	5	• Equação linear e suas características. • Solução de uma equação linear.	Resolver as Atividades 1, 2, 3 e 4
	6	• Sistema linear e suas características. • Solução de um sistema linear.	Resolver as Atividades 5, 6, 7 e 8
Definição do Conteúdo	7	• Definição formal de equação linear. • Definição formal da solução de uma equação linear.	Resolver as Atividades 9, 10, 11 e 12
	8	• Sistema linear 2x2. • Sistema linear mxn. • Solução de um sistema linear.	Resolver as Atividades 13, 14 e 15
	9	• Classificação de um sistema linear. • Resolução de Sistemas Lineares 2x2: Método da Adição.	Resolver a Atividade 16
	10 e 11	• Teorema de Cramer. • Sistema linear 3x3.	Resolver as Atividades 17 e 18
	12	• Sistemas lineares escalonados.	Resolver a Atividade 19
	13 e 14	• Escalonamento de Sistemas Lineares.	Resolver a Atividade 20
Aplicação em novos problemas	15 e 16	• Problemas envolvendo sistemas lineares.	Resolver a Atividade 21
	17 e 18	• Avaliação Descritiva.	Resolver as Atividades 22, 23 e 24

Fonte: Elaborado pelo autor

Sobre o andamento das 18 aulas planejadas nesse cronograma, conforme veremos na seção de resultados e discussões, acabaram durando de maneira prática um total de 26 aulas. Nas próximas subseções, trataremos sobre o desenvolvimento das aulas de cada uma destas etapas, procurando descrever e justificar as ações a serem desenvolvidas no decorrer do cronograma visualizado no Quadro 5.

3.4.1 Uso do problema como ponto de partida

Nesta etapa, composta por 4 aulas (aulas 1 a 4), fizemos uso das ações de abordagem propostas por Proença (2018): escolha do problema, introdução do problema, auxílio aos alunos durante a resolução, discussão das estratégias dos alunos e articulação das estratégias dos alunos

ao conteúdo. A seguir, descrevemos como fizemos cada uma destas ações, sendo esse o plano de aula proposto para as aulas 1 a 4:

- *Escolha do problema:* conforme Proença (2018), para essa ação a situação de Matemática escolhida (o possível problema escolhido) deverá dar direção aos estudantes de modo que utilizem conteúdo matemáticos que já aprenderam, encaminhando-os nas estratégias de resolução com o novo conhecimento. O autor ainda nos atenta que o professor deverá escolher situações que prevejam diferentes estratégias de resolução e que podem ser usadas pelo docente na etapa de *auxílio aos estudantes durante a resolução* como forma de orientar aqueles estudantes que tiverem dificuldades durante o processo de resolução.

Para isso, considerando o conteúdo de SL a ser trabalhado com o 2º ano do EM, procuraremos apresentar aos alunos duas situações matemáticas, a saber: *situação 1* - que diz respeito a um SL com duas equações e duas incógnitas; e *situação 2* – que recai em um sistema possível e determinado (SPD) com três equações e três incógnitas que já está escalonado (mas o qual os estudantes ainda não tiveram contato em sua vida escolar). Essas duas situações foram elaboradas pelo professor pesquisador com a colaboração do GERPEM (Grupo de Estudos de Resolução de Problemas na Educação Matemática) da Universidade Estadual de Maringá.

Acreditamos que o uso dessas duas situações nessa ordem vem ao encontro a prerrogativa dos PCNs para o ensino de SL no EM que afirmavam que seu objetivo era "estender os conhecimentos que os alunos possuem [...] sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3" (BRASIL, 1998, p. 122).

Nesse contexto, a ideia de apresentar primeiramente um SL com duas equações e duas incógnitas na *situação 1*, foi retomar os conhecimentos prévios que os alunos já possuíam sobre esse conteúdo (visto *a priori* no 8º ano do EF) de modo a ampliá-lo por meio da *situação 2*. Sobre a *situação 2*, essa trata de um problema cuja resolução matemática aponta para um SL do tipo 3x3 e escalonado, no qual os estudantes puderam também fazer uso dos conhecimentos prévios sobre resolução algébrica de SL do tipo 2x2 e caso não obtivessem êxito, poderiam tomar uso de estratégias de desenhos, tabelas, tentativa e erro, entre outras de modo a alcançar a solução. O Quadro 6 a seguir, mostra as *situações 1 e 2* pertencentes as aulas 1 a 4 que foi entregue aos alunos com as situações matemáticas propostas:

Quadro 6 - Folha de atividades entregue aos alunos.

AULAS 1 A 4
Observações:
- Atividade em dupla.
- Resolver da maneira que quiser (achar mais conveniente).
- Caso encontre a solução, não diga a resposta em voz alta nem a fale ou mostre para outras duplas.
- Proibido o uso celulares e calculadoras.

Paulo está comprando a lista de material pedido pela escola para seu filho Nicolas. Buscando economizar ele vem fazendo uma pesquisa de preços em 2 livrarias. Veja as situações 1 e 2 com os orçamentos encontrados por Paulo encontrou em cada uma delas e responda as perguntas:

Situação 1: Na Livraria A, Paulo fez dois orçamentos:
Orçamento 1: uma borracha da marca Pitágoras e um lápis da marca Newton. **Total:** R$ 8,00.
Orçamento 2: duas borrachas da marca Pitágoras e quatro lápis da marca Newton. **Total:** R$ 27,50.
Qual o preço da borracha Pitágoras e do lápis Newton na Livraria A?

Situação 2: Já na Livraria B, Paulo fez mais três orçamentos:
Orçamento 1: uma borracha da marca Pitágoras, dois lápis da marca Newton e uma caneta da marca Leibniz. **Total:** R$ 9,00.
Orçamento 2: dois lápis da marca Newton e duas canetas da marca Leibniz. **Total:** R$ 11,00.
Orçamento 3: três canetas da marca Leibniz. **Total:** R$ 10,50.
Qual o preço da borracha Pitágoras, do lápis Newton e da caneta Leibniz na Livraria B?

Fonte: Elaborado pelo autor

Proença (2018, p. 47) também nos aponta que na ação de escolha do problema, "o professor deve de antemão conhecer e prever possíveis estratégias de resolução", a vista disso algumas estratégias de resolução que prevemos para os problemas do Quadro 6 podem ser: por tentativa e erro, fazendo uso de desenhos, de tabelas, usar a combinação de tabelas e desenhos e até mesmo fazendo a utilização de equações. A seguir, explicaremos como pensamos algumas dessas estratégias bem como a efetivação das etapas de RP propostas por Proença (2018) relativas aos conhecimentos linguísticos, semânticos e esquemáticos elencados durante o processo de resolução.

3.4.1.1 Resolvendo a situação 1

Sobre o problema da *situação 1*, o Quadro 7 abaixo disserta sobre etapa de *representação* da resolução de um problema proposta por Proença (2018) elencando os conhecimentos linguístico, semântico e esquemático necessários para essa etapa e evidenciados em trecho(s) do enunciado apresentado pela situação matemática apresentada aos estudantes:

Quadro 7 – Conhecimentos elencados durante a etapa de representação para

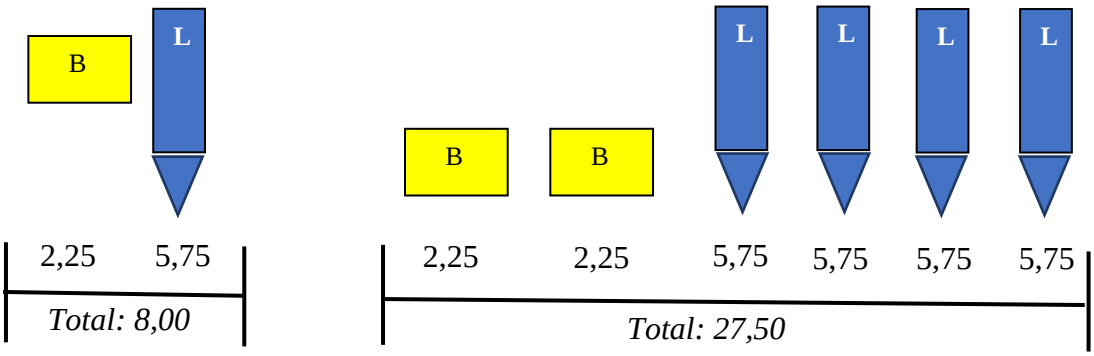
resolução do problema da situação 1.

Etapa Proença (2018)	Conhecimentos	Trecho(s) do enunciado que evidencia a etapa
Representação	*Linguístico:* Perceber que os materiais escolares tiveram seus preços pesquisados na livraria A por meio de dois orçamentos.	"Na Livraria A, Paulo fez dois orçamentos: [...] Orçamento 1: [...] Orçamento 2 [...]"
	Semântico: Reconhecer os valores numéricos citados no texto.	"[...]R$ 20,00. [...] R$ 8,00".
	Esquemático: Reconhecer que se trata de um problema algébrico, no qual cada orçamento corresponde a uma equação de primeiro grau.	*"Orçamento 1:* uma borracha da marca Pitágoras e um lápis da marca Newton. **Total:** R$ 8,00. [equação 1] *Orçamento 2:* duas borrachas da marca Pitágoras e quatro lápis da marca Newton. **Total:** R$ 27,50. [equação 2]"

Fonte: Elaborado pelo autor

Em relação as estratégias de resolução do problema da *situação 1*, os alunos puderam fazer uma estratégia ou conjunto de estratégias que envolvam tentativa e erro, uso de tabelas e/ou desenho e a estratégia de resolução algébrica dos conhecimentos prévios do que viram sobre SL no EF. A Figura 5 a seguir, traz a luz como os estudantes poderiam resolver a *situação 1* por meio de desenhos da borracha e do lápis e atribuindo valores por tentativa e erro até que encontrem os valores corretos que resolvem o problema apresentado:

Figura 5 - Estratégia de desenho e tentativa e erro para resolver a situação 1.



Fonte: Elaborada pelo autor

Por meio da Figura 5, verificamos que os estudantes poderiam resolver a *situação 1* fazendo o diagrama de desenhos da borracha (B) e lápis (L) tendo por base as duas frases do enunciado do problema que dizem respeito às quantidades de materiais a serem comprados e seus respectivos valores totais a serem pagos (orçamentos 1 e 2). Assim, os alunos podem aferir

valores para a borracha e para o lápis cuja soma vale 8 (orçamento 1 e desenho da esquerda) e verificar a validade desses valores para o desenho da direita os quais correspondem ao orçamento 2. Verificamos assim, que os alunos deveriam encontrar que a borracha custa R$ 2,25 e que o lápis custa R$ 5,75. Em relação a essa estratégia, o Quadro 8 abaixo, fala sobre as etapas de RP (planejamento e execução) propostas por Proença (2018) com os seus respectivos tipos de conhecimentos (estratégico e procedimental) apontados em trechos do enunciado da *situação 1* que evidenciam tais etapas e conhecimentos:

Quadro 8 - Etapas de resolução de problemas e conhecimentos elencados na estratégia de resolução por desenho e tentativa e erro da situação 1.

Etapas Proença (2018)	**Conhecimentos Proença (2018)**	**Trecho(s) do enunciado que evidencia a etapa**
Planejamento	*Estratégico:* Desenhar a quantidade de borrachas, lápis e canetas referente a cada uma das frases e atribuir valores até que se encontre a solução procurada. Resolver da equação mais simples até chegar na equação mais complexa.	"[...] *Orçamento 1:* uma borracha da marca Pitágoras e um lápis da marca Newton. **Total:** R$ 8,00. [equação 1] *Orçamento 2:* duas borrachas da marca Pitágoras e quatro lápis da marca Newton. **Total:** R$ 27,50. [equação 2]".
Execução	*Procedimental:* Saber atribuir valores por tentativa e erro de modo que os valores atribuídos sejam soluções simultâneas das equações 1 e 2.	Qual o preço da borracha Pitágoras e do lápis Newton na Livraria A?

Fonte: Elaborado pelo autor

A Tabela 1 abaixo, traz a possibilidade estratégica dos alunos resolverem a situação 1 fazendo o uso de uma tabela baseando-se no enunciado "[...] *Orçamento 1:* uma borracha da marca Pitágoras e um lápis da marca Newton. **Total:** R$ 8,00" - equação 1 e "*Orçamento 2:* duas borrachas da marca Pitágoras e quatro lápis da marca Newton. **Total:** R$ 27,50" - equação 2. Como ilustração ao leitor, colocamos três possíveis tentativas com soluções incorretas e a última com a solução correta a ser encontrada pelos alunos:

Tabela 1 - Estratégia de resolução por tabela do problema da situação 2.

Valores (Borracha; Lápis)	**Equação 1**	**Equação 2**
(B; L)	**B + L = 8**	**2B + 4L = 27,50**
(1; 7)	1 + 7 = 8	2.1 + 4.7 = 2 + 28 = 30
(2; 6)	2 + 6 = 8	2.2 + 4.6 = 4 + 24 = 28
(2,50; 5,50)	2,50 + 5,50 = 8	2.2,50 + 4.5,50 = 5 + 22 = 27
(2,25; 5,75)	2,25 + 5,75 = 8	2.2,25 + 4.5,75 = 4,50 + 23 = 27,50
Resposta: A borracha Pitágoras custa R$ 2,25 e o lápis Newton custa R$ 5,75.		

Fonte: Elaborado pelo autor

Pela Tabela 1, observamos algumas possibilidades de respostas a serem levantadas pelos estudantes durante a resolução da *situação 1*. Deste modo, se por exemplo, a borracha custar 1 real e o lápis 7 reais, esses valores serão uma solução possível da equação 1, porém não serão solução da equação 2 e, portanto, não serão solução para o problema. Assim, na primeira coluna, os estudantes poderão preencher por tentativa e erro os valores dos materiais escolares que solucionam a equação 1 e verificar na segunda coluna se os valores solucionam a equação 2. Em relação a tal estratégia, o Quadro 9 disserta sobre as etapas de RP – planejamento e execução - propostas por Proença (2018) com seus respectivos tipos de conhecimentos interligados a trechos do enunciado da *situação 1* que evidenciam tais etapas e conhecimentos:

Quadro 9 - Etapas de resolução de problemas e conhecimentos elencados na estratégia de resolução por tabela da situação 1.

Etapas Proença (2018)	**Conhecimentos Proença (2018)**	**Trecho(s) do enunciado que evidencia a etapa**
Planejamento	*Estratégico:* Se organizando por meio de uma tabela, atribuir valores às variáveis das equações de modo a encontrar a solução comum das duas equações.	"[...] *Orçamento 1:* uma borracha da marca Pitágoras e um lápis da marca Newton. **Total:** R$ 8,00. [equação 1] *Orçamento 2:* duas borrachas da marca Pitágoras e quatro lápis da marca Newton. **Total:** R$ 27,50. [equação 2]".
Execução	*Procedimental:* Saber efetuar a atribuição dos valores das variáveis a cada uma das equações e efetuar o cálculo que será uma expressão numérica. Entender que os valores atribuídos que serão a solução, devem transformar as 2 equações do problema em sentenças matemáticas verdadeiras.	Qual o preço da borracha Pitágoras e do lápis Newton na Livraria A?

Fonte: Elaborado pelo autor

Por fim, a última estratégia que pensamos para esse problema é a resolução algébrica realizada com o do método da adição ou da substituição por meio do conhecimento prévio dos estudantes, haja vista que o conteúdo de SL com duas equações e duas incógnitas foi visto pelos alunos no EF. O Quadro 10 abaixo, mostra como pode ser feita a resolução algébrica da *situação 1* por meio desses dois métodos (adição e substituição):

Quadro 10 – Estratégia de resolução algébrica da situação 1.

Sendo $\mathrm{b} = \text{borracha}$ e $\mathrm{l} = \text{lápis}$, temos do enunciado:

$$\begin{cases} b + l = 8 \\ 2b + 4l = 27{,}50 \end{cases}$$

<u>Resolução pelo método da adição:</u>

$$\begin{cases} b + l = 8 \ (I) \\ 2b + 4l = 27{,}50 \ (II) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por -2, temos:

$$\begin{cases} -2b - 2l = -16 \quad (I) \\ 2b + 4l = 27{,}50 \ (II) \end{cases}$$

Somando as equações (I) e (II) temos:

$$\begin{cases} \quad\quad 2l = 11{,}50 \quad (I) \\ 2b + 4l = 27{,}50 \ (II) \end{cases}$$

Da equação (I), temos que *l=5,75* e substituindo na equação (II) encontramos b = 2,25.

Resposta: A borracha Pitágoras custa R$ 2,25 e o lápis Newton custa R$ 5,75.

<u>Resolução pelo método da substituição:</u>

$$\begin{cases} \quad b + l = 8 \ (I) \\ 2b + 4l = 27{,}50 \ (II) \end{cases}$$

Isolando b, na equação (1) temos:

$$\begin{cases} \quad b \ = 8 - l \ (I) \\ 2b + 4l = 27{,}50 \ (II) \end{cases}$$

Substituindo a equação (I) na equação (II) temos:

(II) 2.(8-l) + 4l = 27,50

16 – 2l + 4l = 27,50

2l = 11,50

l = 5,75

Substituindo na equação (I) o valor de encontrado, temos:

(II) b = 8 – l

b = 8 -5,75

b = 2,25

Resposta: A borracha Pitágoras custa R$ 2,25 e o lápis Newton custa R$ 5,75.

Fonte: Elaborado pelo autor

Sobre essa estratégia de resolução algébrica, o Quadro 11 disserta sobre as etapas de RP – planejamento e execução - propostas por Proença (2018) com seus respectivos tipos de conhecimentos apontados em trechos do enunciado da *situação 1* que evidenciam tais etapas e conhecimentos:

Quadro 11 - Etapas de resolução de problemas e conhecimentos elencados na estratégia de resolução algébrica da situação 1.

Etapas Proença (2018)	**Conhecimentos Proença (2018)**	**Trecho(s) do enunciado que evidencia a etapa**
Planejamento	*Estratégico:* Resolver as equações adotando o método da adição ou o método da substituição.	"[...] *Orçamento 1:* uma borracha da marca Pitágoras e um lápis da marca Newton. **Total:** R$ 8,00. [equação 1] *Orçamento 2:* duas borrachas da marca Pitágoras e quatro lápis da marca Newton. **Total:** R$ 27,50. [equação 2]".
Execução	*Procedimental:* Saber efetuar os cálculos na ordem: equação 3, equação 2 e equação 1 e responder quanto custam cada um dos materiais escolares.	Qual o preço da borracha Pitágoras e do lápis Newton na Livraria A?

Fonte: Elaborado pelo autor

Após explanarmos sobre as estratégias de resolução da *situação 1,* a seguir dissertaremos sobre as estratégias de resolução da *situação 2.*

3.4.1.2 Resolvendo a situação 2

Em relação ao problema da *situação 2*, o Quadro 12 abaixo nos mostra a etapa de *representação* da resolução de um problema proposta por Proença (2018) elencando os conhecimentos linguístico, semântico e esquemático exigidos para essa etapa e evidenciados em trecho(s) do enunciado apresentado:

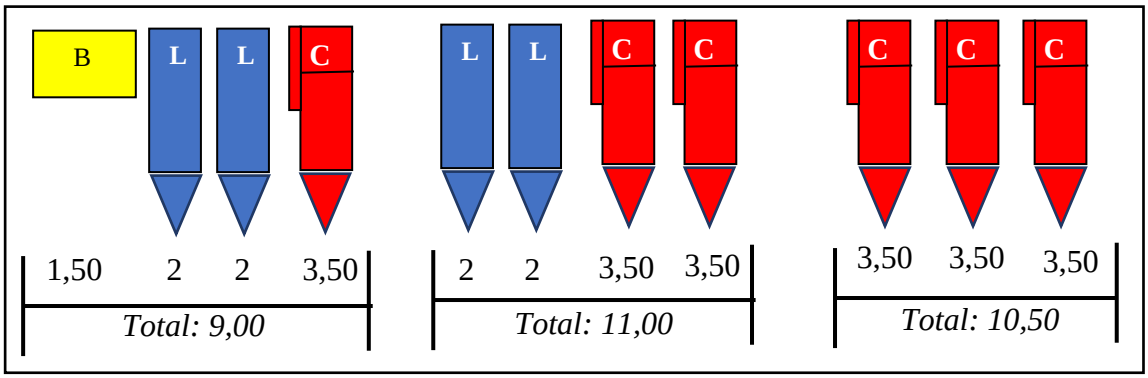
Quadro 12 – Conhecimentos elencados durante a etapa de representação para resolução do problema da situação 2.

Etapa Proença (2018)	**Conhecimentos Proença (2018)**	**Trecho(s) do enunciado que evidencia a etapa**
Representação	*Linguístico:* Perceber que os materiais escolares tiveram seus preços pesquisados na livraria B.	"Já na Livraria B, Paulo fez mais três orçamentos:"
	Semântico: Reconhecer os valores numéricos citados no texto.	"[...] R$ 9,00. [...] R$ 11,00. [...] R$ 10,50".
	Esquemático: Reconhecer que se trata de um problema algébrico, no qual cada frase corresponde a uma equação de primeiro grau.	*"Orçamento 1:* uma borracha da marca Pitágoras, dois lápis da marca Newton e uma caneta da marca Leibniz. **Total:** R$ 9,00. [equação 1] *Orçamento 2:* dois lápis da marca Newton e duas canetas da marca Leibniz. **Total:** R$ 11,00. [equação 2] *Orçamento 3:* três canetas da marca Leibniz. **Total:** R$ 10,50. [equação 3]"

Fonte: Elaborado pelo autor

Pensando nas estratégias de resolução da *situação 2*, a Figura 6 abaixo mostra a estratégia que os estudantes poderiam fazer por meio de diagramas de desenhos e tentativa e erro partindo das frases que constam no problema: "*Orçamento 1:* uma borracha da marca Pitágoras, dois lápis da marca Newton e uma caneta da marca Leibniz. **Total:** R$ 9,00. *Orçamento 2:* dois lápis da marca Newton e duas canetas da marca Leibniz. **Total:** R$ 11,00. *Orçamento 3:* três canetas da marca Leibniz. **Total:** R$ 10,50".

Figura 6 - Estratégia de desenho e tentativa e erro para resolver a situação 2.



Fonte: Elaborada pelo autor

Pela Figura 6, os alunos poderiam resolver a *situação 2* fazendo o desenho da borracha (B), dos lápis (L) e das canetas (C) por meio de um diagrama baseando-se nas três frases presentes no enunciado. Aliado a esses desenhos, os estudantes poderiam encontrar as soluções por meio da tentativa e erro, aferindo valores aos materiais escolares, sendo possível resolver mais facilmente a partir do terceiro desenho, no qual 3 canetas custam R$ 10,50 e concluindo que uma caneta custará R$ 3,50. No segundo desenho, o aluno poderá perceber que se cada caneta custa R$ 3,50, logo cada lápis terá que custar R$ 2,00 para que o total seja de 11 reais. E, por fim, no terceiro desenho, sabedor do custo da caneta e do lápis conclui-se que a borracha custará R$ 1,50. Ainda sobre a estratégia de resolução por meio de desenhos e tentativa e erro, o Quadro 13 a seguir, explicita as etapas de RP (planejamento e execução) propostas por Proença (2018) com os seus respectivos tipos de conhecimentos (estratégico e procedimental) apontados em trechos do enunciado da *situação 2* que evidenciam tais etapas e conhecimentos:

Quadro 13 - Etapas de resolução de problemas e conhecimentos elencados na estratégia de resolução por desenho e tentativa e erro da situação 2.

Etapas Proença (2018)	**Conhecimentos Proença (2018)**	**Trecho(s) do enunciado que evidencia a etapa**
Planejamento	*Estratégico:* Desenhar a quantidade de borrachas, lápis e canetas referente a cada uma das frases e atribuir valores até que se encontre a solução procurada. Resolver da equação mais simples até chegar na equação mais complexa.	*"Orçamento 1:* uma borracha da marca Pitágoras, dois lápis da marca Newton e uma caneta da marca Leibniz. **Total:** R$ 9,00. [equação 1] *Orçamento 2:* dois lápis da marca Newton e duas canetas da marca Leibniz. **Total:** R$ 11,00. [equação 2] *Orçamento 3:* três canetas da marca Leibniz. **Total:** R$ 10,50. [equação 3]"
Execução	*Procedimental:* Saber atribuir valores por tentativa e erro de modo que os valores atribuídos sejam soluções simultâneas das equações 1, 2 e 3.	Qual o preço da borracha Pitágoras, do lápis Newton e da caneta Leibniz na Livraria B?

Fonte: Elaborado pelo autor

Outra estratégia de resolução da *situação 2* a qual os alunos poderão utilizar será o uso de uma tabela. Por meio dessa, é possível atribuir valores a caneta, ao lápis e a borracha até que encontrem a solução que será comum para as três equações presentes no enunciado e que permitam responder à pergunta proposta pelo problema. A Tabela 2 abaixo, traz como poderá ser elaborada tal tabela:

Tabela 2 - Estratégia de resolução por tabela do problema da situação 2.

Valores (Borracha Lápis; caneta)	**Equação 1**	**Equação 2**	**Equação 3**
(B; L; C)	**B + 2L + C = 9**	**2L + 2C = 11**	**3C = 10,50**
(2; 2; 3)	2 + 2.2 + 3 = 9	2.2 + 2.3 = 10	3.3 = 9
(2; 2,50; 3)	2 + 2.2,50 + 2 = 9	2.2,50 + 2.2 = 9	2.2=4
(3; 1; 3,50)	3 + 2.1 + 3,50 = 8,50	2.1 + 2.3,50 = 9	3.3,50 = 10,50
(1,50; 2; 3,50)	1,50 + 2.2 + 3,50 = 9	2.2 + 2.3,50 = 11	3.3,50 = 10,50
Resposta: A caneta custa R$ 3,50, o lápis R$ 2,00 e a borracha R$ l,50.			

Fonte: Elaborada pelo autor

Na Tabela 2 observamos na primeira coluna os valores possíveis que os alunos poderiam atribuir aos materiais escolares de modo a resolverem as 3 equações elencadas na situação 2. Assim, na primeira linha, observamos que se os estudantes atribuíssem para borracha (b=2 reais), ao lápis (l=2 reais) e à caneta (c=3 reais), verificamos que tais valores resolveriam a equação 1, mas não resolveriam as equações 2 e 3. De forma análoga podem ser colocados novos valores para resolução das equações até que que encontre que os valores comuns dos materiais escolares que resolvem as três equações que serão para borracha (b=1,50 real), para o lápis (l=2 reais) e para a caneta (c=3,50 reais). Do mesmo modo, para essa estratégia, o Quadro 14 traz à luz as etapas de RP – planejamento e execução - propostas por Proença (2018) com seus respectivos tipos de conhecimentos apontados em trechos do enunciado da *situação 2* que evidenciam tais etapas e conhecimentos:

Quadro 14 - Etapas de resolução de problemas e conhecimentos elencados na estratégia de resolução por tabela da situação 2.

Etapas Proença (2018)	**Conhecimentos Proença (2018)**	**Trecho(s) do enunciado que evidencia a etapa**
Planejamento	*Estratégico:* Se organizando por meio de uma tabela, atribuir valores às variáveis das equações de modo a encontrar a solução comum das três equações.	*"Orçamento 1:* uma borracha da marca Pitágoras, dois lápis da marca Newton e uma caneta da marca Leibniz. **Total:** R$ 9,00. [equação 1] *Orçamento 2:* dois lápis da marca Newton e duas canetas da marca Leibniz. **Total:** R$ 11,00. [equação 2]

		Orçamento 3: três canetas da marca Leibniz. **Total:** R$ 10,50. [equação 3]”
Execução	*Procedimental:* Saber efetuar a atribuição dos valores das variáveis a cada uma das equações e efetuar o cálculo que será uma expressão numérica. Entender que os valores atribuídos que serão a solução, devem transformar as 3 equações do problema em sentenças matemáticas verdadeiras.	Qual o preço da borracha Pitágoras, do lápis Newton e da caneta Leibniz na Livraria B?

Fonte: Elaborado pelo autor

Por fim, a última estratégia que pensamos exigiu do estudante o conhecimento prévio de cálculo algébrico que já possui de SL com 2 equações e 2 incógnitas estudados no 8º ano do ensino fundamental. Dessa maneira, partindo desses conhecimentos o discente poderia ter efetuado o cálculo das variáveis da equação mais simples para a mais complexa. Para tanto, dessa estratégia o estudante deveria: calcular o valor da caneta na equação 3; substituir o valor na equação 2 e assim encontrar o valor do lápis; e, por fim, substituir os dois valores já encontrados na equação 1 de modo a calcular o valor da borracha. O Quadro 15 nos mostra como deveria ser feita a estratégia de resolução algébrica da *situação 2*:

Quadro 15 – Estratégia de resolução algébrica da situação 2.

Sendo B = borracha, L = lápis e C = caneta, temos do enunciado:

B + 2L + C = 9 (Equação 1); 2L + 2C = 11 (Equação 2) e 3C = 10,50 (Equação 3)

Resolvendo a equação 3, temos:

3C = 10,50

$$C = \frac{10,50}{3}$$

C = 3,50

Substituindo C = 3,50 na equação 2, teremos:

2L + 2C =11

2L + 2.3,50 = 11

2L + 7 = 11

2L = 11 – 7

2L = 4

$$L = \frac{4}{2}$$

L = 2

Substituindo C = 3,50 e L = 2 na equação 1, encontraremos:

B + 2L + C = 9

B + 2.2 + 3,50 = 9

B + 4 + 3,50 = 9

B + 7,50 = 9

B = 9 – 7,50

B = 1,50

Portanto, na livraria A, a borracha custa R$ 1,50, o lápis custa R$ 2,00 e a caneta custa R$ 3,50.

Fonte: Elaborado pelo autor

Em relação a essa estratégia de resolução algébrica, o Quadro 16 disserta sobre as etapas de RP – planejamento e execução - propostas por Proença (2018) com seus respectivos tipos de conhecimentos apontados em trechos do enunciado da *situação 2* que evidenciam tais etapas e conhecimentos:

Quadro 16 - Etapas de resolução de problemas e conhecimentos elencados na estratégia de resolução algébrica da situação 2.

Etapas Proença (2018)	**Conhecimentos Proença (2018)**	**Trecho(s) do enunciado que evidencia a etapa**
Planejamento	*Estratégico:* Resolver as equações da mais simples para a mais complexa, ou seja, a equação 3, seguida da equação 2 e por fim a equação 3.	*"Orçamento 1:* uma borracha da marca Pitágoras, dois lápis da marca Newton e uma caneta da marca Leibniz. **Total:** R$ 9,00. [equação 1] *Orçamento 2:* dois lápis da marca Newton e duas canetas da marca Leibniz. **Total:** R$ 11,00. [equação 2] *Orçamento 3:* três canetas da marca Leibniz. **Total:** R$ 10,50. [equação 3]"
Execução	*Procedimental:* Saber efetuar os cálculos na ordem: equação 3, equação 2 e equação 1 e responder quanto custam cada um dos materiais escolares.	Qual o preço da borracha Pitágoras, do lápis Newton e da caneta Leibniz na Livraria B?

Fonte: Elaborado pelo autor

Observamos aqui, que tanto a *situação 1* quanto na *situação 2*, a etapa de *monitoramento* para resolver um problema proposta por Proença (2018) não está associada aos conhecimentos elencados pelo mesmo autor. Porém, tal etapa está atrelada ao momento no qual o estudante verifica se a resposta encontrada está de acordo com o problema, a sua racionalidade de resolução e a identificação de possíveis erros cometidos nas etapas anteriores. Dessa maneira, a execução de tal etapa é observada no momento em que os estudantes verificam que os valores atribuídos solucionam todas as equações do problema e respondem de maneira adequada ao questionamento presente no enunciado da situação a eles apresentada.

Agora, prosseguiremos explanando como ocorreram as quatro ações seguintes da proposta de Proença (2018) na etapa de *Uso do problema como ponto de partida* em nossa organização de ensino:

- *Introdução do Problema:* Para essa ação, o professor apresentou uma folha sulfite (Figura 10) que contém as observações e as duas situações de matemática para que as resolvam. Para isso, o docente dividiu os indivíduos em duplas e indicou para tentarem resolver da maneira que desejarem. É importante salientar bem as demais observações, para que os alunos não fizessem uso de celulares e calculadoras, não falassem a resposta encontrada em voz alta e nem dizer para as demais duplas, como fizeram ou os valores encontrados durante o processo de resolução. Proença (2018, p. 51) aponta que "é nesse momento de início da tentativa de resolução que a situação pode se configurar como algo difícil ao grupo, isto é, pode se tornar um problema". Dessa maneira, o professor observou tal ocorrência e entrou com a próxima ação a qual descreveremos a seguir.
- *Auxílio aos alunos durante a resolução:* Nessa ação, o pesquisador buscou conforme preconiza Proença (2018) dar um aparato as duplas de maneira a tirar suas dúvidas iniciais, interpretações equivocadas, questionando e verificando a resposta que obtiveram. Proença (2018) aponta que nesse momento, o docente tem um papel não só de observar, mas também de incentivar e direcionar a aprendizagem dos alunos e é dessa maneira que buscamos nesse momento realizar o trabalho com os grupos: verificando suas dificuldades encontradas, os processos de resolução seguidos, a motivação (atitudes positivas e/ou negativas) em busca da solução. Dessa maneira, ao observarmos que existiam duplas ou que a maioria estava com dificuldades procuramos falar de maneira individual ou coletiva para que as equipes pensassem em algumas das estratégias que determinamos na ação anterior. Tivemos em mente, começarmos

sugerindo a estratégia por meio de desenho e atribuições de valores as quais detalhamos na ação anterior (Figuras 11 e 13) e que consideramos ser uma estratégia mais simples. Em seguida, sugerimos as estratégias que consideramos mais robustas que são do uso de tabela e equações (Tabelas 1 e 2) e da resolução algébrica (Figura 12).

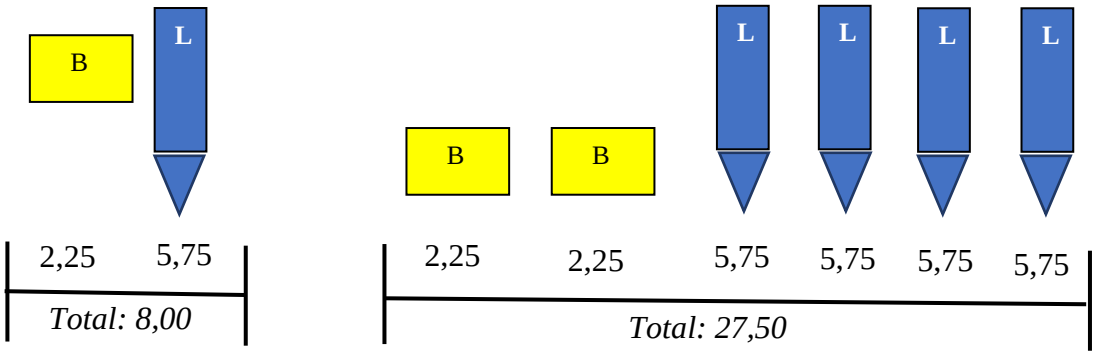
- *Discussão das estratégias dos alunos:* esse foi o momento de socialização das estratégias adotadas pela turma. Para tanto, solicitamos que algumas equipes apresentem as estratégias utilizadas expondo na lousa. Também, segundo preconiza Proença (2018), apontamos as possíveis dificuldades encontradas, equívocos cometidos, respostas encontradas incoerentes com a pergunta do problema, entre outros.
- *Articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo:* Nessa última ação, buscamos fazer uso de alguma das estratégias de resolução dos alunos relativas as *situações 1* e *2* para articularmos ao conteúdo de SL. Dissertaremos a seguir como pensamos nas possibilidades para ação de articulação ao conteúdo dessas duas situações.

3.4.1.3 Articulação ao conteúdo da situação 1

A *situação 1* diz respeito a um SL com duas equações e duas incógnitas cuja articulação ao conteúdo pode ser feita por meio do método da adição ou da substituição o qual poderá ter sido usado como estratégia por um dos alunos participantes e que apresentamos no Quadro 9. O professor ainda poderá usar um desses métodos partindo da estratégia de desenho (Figura 5) ou de tabela (Tabela 1) previstas acima. Caso não seja possível articular com alguma estratégia usada pelos estudantes, o docente poderá fazê-lo de maneira direta conforme preconiza Proença (2018).

A Figura 7 mostra como o professor poderá fazer a articulação ao conteúdo usando a estratégia prevista de desenho.

Figura 7 – Articulação ao conteúdo da situação 1 por meio da estratégia de desenho.



Sendo b = borracha e l = lápis, temos do desenho da esquerda a equação $b + l = 8$ e do desenho da direita , temos a equação $2b + 4l = 27{,}50$.

$$\begin{cases} b + l = 8 \\ 2b + 4l = 27{,}50 \end{cases}$$

<u>Resolução pelo método da adição:</u>

$$\begin{cases} b + l = 8\ (I) \\ 2b + 4l = 27{,}50\ (II) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por -2, temos:

$$\begin{cases} -2b - 2l = -16\ \ (I) \\ 2b + 4l = 27{,}50\ (II) \end{cases}$$

Somando as equações (I) e (II) temos:

$$\begin{cases} 2l = 11{,}50\ \ (I) \\ 2b + 4l = 27{,}50\ (II) \end{cases}$$

Da equação (I), temos que $l=5{,}75$ e substituindo na equação (II) encontramos b = 2,25.

Resposta: A borracha Pitágoras custa R$ 2,25 e o lápis Newton custa R$ 5,75.

<u>Resolução pelo método da substituição:</u>

$$\begin{cases} b + l = 8\ (I) \\ 2b + 4l = 27{,}50\ (II) \end{cases}$$

Isolando b, na equação (1) temos:

$$\begin{cases} b = 8 - l\ (I) \\ 2b + 4l = 27{,}50\ (II) \end{cases}$$

Substituindo a equação (I) na equação (II) temos:

(II) 2.(8-l) + 4l = 27,50

16 – 2l + 4l = 27,50

2l = 11,50

l = 5,75

Substituindo na equação (I) o valor de encontrado, temos:

(II) b = 8 – l

b = 8 -5,75

b = 2,25

Resposta: A borracha Pitágoras custa R$ 2,25 e o lápis Newton custa R$ 5,75.

Fonte: Elaborada pelo autor

Dessa maneira, vemos que o professor poderia equacionar o desenho da esquerda como equação (I) e o desenho da direita como equação (II) formando assim o sistema linear com duas equações e duas incógnitas e resolvendo tal sistema pelo método da adição ou da substituição de maneira a chegar na solução do problema. Agora, o Quadro 17 a seguir mostra sobremaneira como o docente poderia utilizar a estratégia de tabela dos alunos para articular ao conteúdo de SL:

Quadro 17 - Articulação ao conteúdo usando a estratégia de tabela para resolver a situação 1.

Valores (Borracha; Lápis)	**Equação 1**	**Equação 2**
(B; L)	**B + L = 8**	**2B + 4L = 27,50**
(2,25; 5,75)	2,25 + 5,75 = 8	2.2,25 + 4.5,75 = 4,50 + 23 = 27,50
Resposta: A borracha Pitágoras custa R$ 2,25 e o lápis Newton custa R$ 5,75.		

Vamos escrever a seguir, as equações 1 e 2 vistas nas colunas da tabela:

Sendo b = borracha e l = lápis, temos do desenho da esquerda a equação $b + l = 8$ e do desenho da direita, temos a equação $2b + 4l = 27,50$.

$$\begin{cases} b + l = 8 \\ 2b + 4l = 27,50 \end{cases}$$

<u>Resolução pelo método da adição:</u>

$$\begin{cases} b + l = 8\ (I) \\ 2b + 4l = 27,50\ (II) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por -2, temos:

$$\begin{cases} -2b - 2l = -16\ \ (I) \\ 2b + 4l = 27,50\ (II) \end{cases}$$

Somando as equações (I) e (II) temos:

$$\begin{cases} 2l = 11,50\ \ (I) \\ 2b + 4l = 27,50\ (II) \end{cases}$$

Da equação (I), temos que $l=5,75$ e substituindo na equação (II) encontramos b = 2,25.

Resposta: A borracha Pitágoras custa R$ 2,25 e o lápis Newton custa R$ 5,75.

<u>Resolução pelo método da substituição:</u>

$$\begin{cases} b + l = 8\ (I) \\ 2b + 4l = 27,50\ (II) \end{cases}$$

Isolando b, na equação (1) temos:

$$\begin{cases} b = 8 - l\ (I) \\ 2b + 4l = 27,50\ (II) \end{cases}$$

Substituindo a equação (I) na equação (II) temos:

(II) 2.(8-l) + 4l = 27,50

16 – 2l + 4l = 27,50

2l = 11,50

l = 5,75

Substituindo na equação (I) o valor de encontrado, temos:

(II) b = 8 – l

b = 8 -5,75

b = 2,25

Resposta: A borracha Pitágoras custa R$ 2,25 e o lápis Newton custa R$ 5,75.

Fonte: Elaborado pelo autor

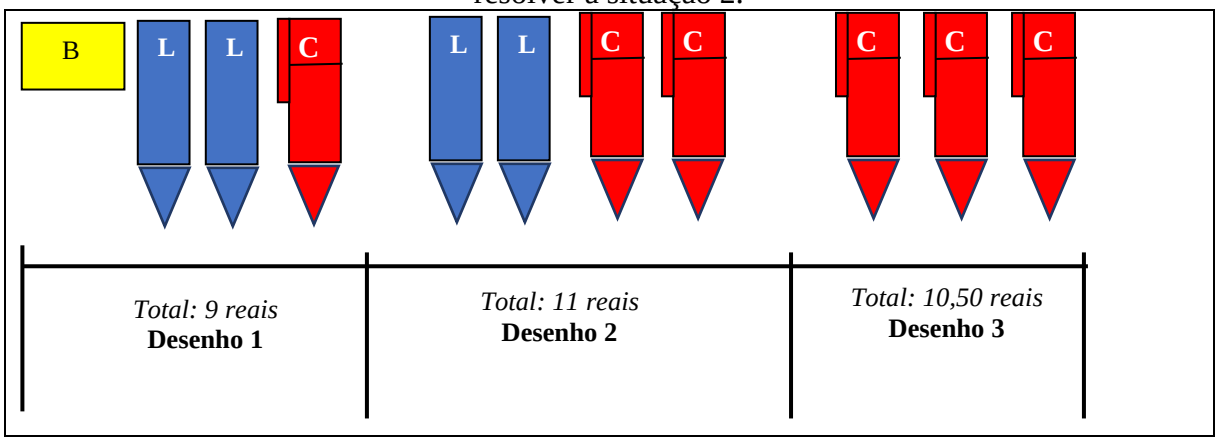
Pelo Quadro 17 vemos que o professor poderia usar a estratégia de tabela, retirando as equações (I) e (II) das colunas da tabela, escrevendo assim o SL e resolvendo-o pelo método da adição e da substituição. Por fim, apontamos aqui que caso o professor quisesse fazer uso da estratégia de resolução algébrica usada pelo aluno, a articulação já ocorreria de maneira direta, bastando o professor proceder como o exposto anteriormente no Quadro 9. Desse modo, propomos que se a estratégia usada pelo aluno para resolver o SL for o método da adição, bastaria o professor complementar com o método da substituição para completar a articulação ao conteúdo.

A seguir, discorremos sobre a abordagem na articulação ao conteúdo da *situação 2.*

3.4.1.4 Articulação ao conteúdo da situação 2

Sobre a articulação ao conteúdo da *situação 2*, essa recai em um SL escalonado com 3 equações e 3 incógnitas, cuja resolução é mais simples e imediata. Sobre a abordagem do professor para articular uma estratégia ao conteúdo de SL a ser trabalhado, o professor poderia ter usado tanto a estratégia de desenho (Figura 6), de tabela (Tabela 2) ou algébrica (Quadro 14) que vimos anteriormente, de maneira que se chegue à definição de SL e de como resolvê-lo. Sobre a estratégia de resolução por meio de desenhos, o professor poderia a partir dos desenhos ter escrito as equações e o SL escalonado, para em seguida resolvê-lo. A Figura 8 a seguir, elucida como poderia ser feita a articulação do conteúdo usando-se essa estratégia de desenho:

Figura 8 – Articulação ao conteúdo usando a estratégia de desenho para resolver a situação 2.



Do desenho acima, sendo B = borracha, L= lápis e C = caneta, podemos escrever:

$$\begin{cases} B + 2L + C = 9 \ (Desenho\ 1) \\ 2L + 2C = 11\ (Desenho\ 2) \\ 3C = 10{,}50\ (Desenho\ 3) \end{cases}$$

As equações acima formam juntas o que podemos chamar de Sistema Linear. Esse Sistema Linear já está escalonado. Vamos nomear as equações de I, II e III e resolvê-las em ordem decrescente:
escalonado. Vamos nomear as equações de I, II e III e resolvê-las em ordem decrescente:

$$\begin{cases} B + 2L + C = 9 \quad (I) \\ 2L + 2C = 11 \quad (II) \\ 3C = 10{,}50\ (III) \end{cases}$$

Resolvendo primeiramente a equação (I), teremos:

$III\ )\ 3C = 10{,}50$

$C = \frac{10{,}50}{3}$

$C = 3{,}50$

Substituindo o valor C na equação (II), encontraremos o valor de L:

$II)\ 2L + 2\,C = 11$

$2L + 2\,.\,3{,}50 = 11$

$2L + 7 = 11$

$2L = 11 - 7$

$2L = 4$

$L = \frac{4}{2}$

$L = 2$

Por fim, substituindo os valores de C e L na equação (I), encontraremos o valor de B:

$I)\ B + 2L + C = 9$

$B + 2.2 + 3{,}50 = 9$

$B + 4 + 3{,}50 = 9$

$B + 7{,}50 = 9$

$B = 9 - 7{,}50$

$B = 1{,}50$

Portanto, a borracha custa R$ 1,50, o lápis R$ 2,00 e a caneta custa R$ 3,50.

Fonte: Elaborada pelo autor

Outra possibilidade do docente articular o conteúdo de SL foi partindo da resolução usada por meio da estratégia de tabela, conforme vimos na Tabela 2. Para a articulação, bastaria o docente ter trazido as equações usadas nas colunas da tabela e tê-las escrito na notação de sistema linear escalonado e, em seguida, efetuado a resolução. O Quadro 18 a seguir, nos mostra sobremaneira, como poderia ter ocorrido essa abordagem:

Quadro 18 - Articulação ao conteúdo usando a estratégia de tabela para resolver a situação 2.

Valores (Borracha Lápis; caneta)	**Equação 1**	**Equação 2**	**Equação 3**
(B; L; C)	**B + 2L + C = 9**	**2L + 2C = 11**	**3C = 10,50**
(1,50; 2; 3,50)	1,50 + 2.2 + 3,50 = 9	2.2 + 2.3,50 = 11	3.3,50 = 10,50
Resposta: A caneta custa R$ 3,50, o lápis R$ 2,00 e a borracha R$ l,50.			

Vamos escrever a seguir, as equações 1, 2 e 3 vistas nas colunas da tabela:

$$\begin{cases} B + 2L + C = 9 \ \ (Coluna\ 2\ da\ tabela) \\ 2L + 2C = 11\ (Coluna\ 3\ da\ tabela) \\ 3C = 10{,}50\ (Coluna\ 4\ \ da\ tabela) \end{cases}$$

As equações acima formam juntas o que podemos chamar de Sistema Linear. Esse Sistema Linear já está escalonada. Vamos nomear as equações de I, II e III e resolvê-las em ordem decrescente:

$$\begin{cases} B + 2L + \ C = 9 \quad (\ I) \\ 2L + 2C = 11 \quad (II) \\ 3C = 10{,}50\ (III) \end{cases}$$

Resolvendo primeiramente a equação (III), teremos:

$III\ )\ \ 3C = 10{,}50$

$C = \dfrac{10{,}50}{3}$

$C = 3{,}50$

Substituindo o valor C na equação (II), encontraremos o valor de L:

$II)\ 2L + 2\ C = 11$

$2L + 2\ .\ 3{,}50 = 11$

$2L + 7 = 11$

$2L = 11 - 7$

$2L = 4$

$L = \dfrac{4}{2}$

$L = 2$

Por fim, substituindo os valores de C e L na equação (I), encontraremos o valor de B:

$I)\ B + 2L + C = 9$

$B + 2.2 + 3{,}50 = 9$

$B + 4 + 3{,}50 = 9$

$B + 7{,}50 = 9$

$B = 9 - 7{,}50$

$B = 1{,}50$

Portanto, a borracha custa R$ 1,50, o lápis R$ 2,00 e a caneta custa R$ 3,50.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, o professor ainda poderia ter usado a estratégia de resolução algébrica direta vista no Quadro 15 de maneira a articular ao conteúdo de SL e sua resolução. Caso algum aluno tenha tomado uso dessa estratégia, ele já realizou a resolução de um SL escalonado sem saber de sua definição matemática. Desse modo, o professor poderia explorar esse fato para realizar a articulação do conteúdo. O Quadro 19 abaixo, disserta sobre como o docente poderá fazer a articular por meio dessa estratégia:

Quadro 19 - Articulação ao conteúdo usando a estratégia de resolução algébrica para resolver a situação 2.

Do enunciado da situação 2 podemos nomear B = borracha, L= lápis e C = caneta, podemos escrever:

$$\begin{cases} B + 2L + C = 9 \ \ (Orçamento\ 1) \\ 2L + 2C = 11\ (Orçamento\ 2) \\ 3C = 10{,}50\ (Orçamento\ 3) \end{cases}$$

As equações acima formam juntas o que podemos chamar de Sistema Linear. Esse Sistema Linear já está escalonado. Vamos nomear as equações de I, II e III e resolvê-las em ordem decrescente:

escalonado. Vamos nomear as equações de I, II e III e resolvê-las em ordem decrescente:

$$\begin{cases} B + 2L + C = 9 \quad (I) \\ 2L + 2C = 11 \quad (II) \\ 3C = 10{,}50 \ (III) \end{cases}$$

Resolvendo primeiramente a equação (I), teremos:

$III\ )\ 3C = 10{,}50$

$C = \frac{10{,}50}{3}$

$C = 3{,}50$

Substituindo o valor C na equação (II), encontraremos o valor de L:

$II)\ 2L + 2\,C = 11$

$2L + 2\,.\,3{,}50 = 11$

$2L + 7 = 11$

$2L = 11 - 7$

$2L = 4$

$L = \frac{4}{2}$

$L = 2$

Por fim, substituindo os valores de C e L na equação (I), encontraremos o valor de B:

$I)\ B + 2L + C = 9$

$B + 2.2 + 3{,}50 = 9$

$B + 4 + 3{,}50 = 9$

$B + 7{,}50 = 9$

$B = 9 - 7{,}50$

$B = 1{,}50$

Portanto, a borracha custa R$ 1,50, o lápis R$ 2,00 e a caneta custa R$ 3,50.

Fonte: Elaborado pelo autor

Com a ação de *articulação das estratégias de conteúdo* finalizamos a etapa de *uso do problema como ponto de partida* proposta por Proença (2021). Agora é o momento da *formação do conceito* proposta pelo autor.

3.4.2 Formação do conceito

Após os alunos terem contato com o conteúdo de SL, Proença (2021, p. 09) nos lembra que “a etapa seguinte é a de levar os alunos a formarem o conceito, ou seja, aprenderem e desenvolverem a compreensão sobre o conceito”. Assim, elaboramos as aulas dessa etapa objetivando que os estudantes compreendessem o conceito de equação linear – EL e sua solução (aula 5) e ainda o conceito de SL e sua solução (aula 6).

Pensamos para essas aulas, que de posse da folha de atividades entregue no início das atividades, que os estudantes poderiam trabalhar em duplas de modo que pudessem compartilhar seus conhecimentos prévios e adquiridos durante as aulas. As duas próximas subseções explicam as atividades empregadas nas aulas 5 e 6.

3.4.2.1 – Aula 5: conceituando equação linear e sua solução

A aula 5 objetivou conceituar com os alunos as características de uma EL e de sua solução. Acreditamos ser importante a conceituação de uma EL pois o conjunto de equações lineares é que formam um SL que também pode ser chamado de sistema de equações lineares. Por isso iniciamos com a Atividade 1 que pode ser vista no Quadro 20 a seguir:

Quadro 20 – Proposta da atividade 1.

Aula 5 – Conceituando Equação Linear

Equação Linear

Antes de aprendermos mais sobre sistemas lineares, se faz necessário que você entenda o conceito importante de equações lineares. Para isso, faça a atividade a seguir:

Atividade 1:

a) No quadro 1 abaixo, observamos exemplos de equações que podemos chamar de lineares:

QUADRO 1

$I)\ x + 4y = 10$

II) a + 2b + c = $\frac{-1}{5}$

$III)\ \frac{m}{2} - 4n = -2{,}5$

$IV)\ \sqrt{3}$ x – 1,15 y + πz = 7

Quais características você observa que uma equação linear **PODE** ter? _____

b) Agora, no quadro 2 temos equações que **NÃO SÃO** lineares:

QUADRO 2

$I)\ x\,.\,y.\,z = 8$

II) $a^2 + 2b^3 + c = -9$

$III)\ \frac{5}{t} + 10u - v^3 = 0$

$IV)\ \sqrt{3}\, d^2 - 9{,}5w + \pi z = 7$

Quais características você observa que uma equação linear **NÃO PODE** ter? _____

Fonte: Elaborado pelo autor

No Quadro 20 é apresentada a Atividade 1 – item *a* em que é dado o quadro 1 no qual os alunos se depararam com equações que são lineares e foi solicitado aos estudantes que identificassem as características que observaram e que são inerentes a essas equações lineares. Já na *Atividade 1* – item *b* foi disponibilizada no Quadro 2 com equações que não são lineares

e, da mesma forma, solicitou-se que os indivíduos identifiquem quais as características de equações que não são lineares. Pensamos que desse modo o aluno poderia compreender o conceito do que é e o que não é uma EL, explorando suas diferentes e possíveis representações, conforme apregoa Proença (2021). A ideia para essa atividade foi disponibilizarmos um tempo para que os estudantes fizessem as atividades em seus grupos com o professor auxiliando aqueles estudantes que tivessem dificuldades e, ao final desse tempo, que se fizesse na lousa a construção de um consenso da turma com relação as respostas dos itens *a* e *b*.

Dessa forma, essa atividade veio ao encontro ao apontamento feito por Proença (2021) pois permitiu aos alunos pudessem apresentar o conceito (construto mental) evidenciando as características do conceito de EL por eles evidenciadas. Já em relação a ampliação do conceito de EL, foram propostas as Atividades 2, 3 e 4. Tais atividades podem ser visualizadas no Quadro 21 abaixo:

Quadro 21 - Proposta das atividades 2, 3 e 4.

Atividade 2: Assinale quais equações abaixo são lineares, em seguida justifique porque as demais equações não são lineares.

2.1

$A)$ ( ) $x + y + z = 10$

$B)$ ( ) $a^2 + b^3 + \sqrt{c} = 25$

$C)$ ( ) $m + np = 10$

Justificativa:

_____

_____

2.2

$D)$ ( ) $a^3 + b^2 = 10$

$E)$ ( ) $x + y - 9z = \frac{3}{5}$

$F)$ ( ) $\frac{10}{a} + b = 6$

Justificativa:

_____

2.3

$G)$ ( ) $xyz = 27$

$H)$ ( ) $p - 4q = \sqrt{2}$

$I)$ ( ) $\frac{m}{4} + 3,5n - 5p = -1$

Justificativa:

_____

Solução de uma Equação Linear

No ensino fundamental, você aprendeu que a solução de uma equação do 1º grau torna a equação uma sentença verdadeira. Assim, se temos a equação x + 4 = 5, para x=1 temos que 1 + 4 = 5 e 1 é a solução

dessa equação. De maneira análoga, podemos pensar a solução de uma equação linear. É o que faremos nas atividades a seguir.

Atividade 3
a) Na equação linear $x + y = 10$, quais valores para x e para y tornam a equação linear uma sentença verdadeira?
b) E na equação linear $a + b - c = 0$, quais valores para a, b e c tornam a equação linear uma sentença verdadeira?
c) O que significam para as equações lineares os valores numéricos que as tornam em sentenças matemáticas verdadeiras?
d) Observando os itens *a* e *b* o que você pode observar em relação a quantidade de soluções de uma equação linear?

Atividade 4
a) Na equação linear d + e = 8, se considerarmos d = -2 e e = -6, terei a solução dessa equação? Justifique.
b) Dada a equação linear x-y+z = 9. Aponte 2 valores para *x, y* e *z* que são soluções dessa equação linear e 2 valores de *x, y* e *z* que não são soluções dessa equação linear.
c) Sejam os números 2 e 10, escreva uma equação linear na qual esses dois números sejam soluções.

Fonte: Elaborado pelo autor

Por meio da Atividade 2 apresentamos variações do conceito que permitem ampliar a compreensão conceitual de EL por meio de exemplos e não exemplos. Desse modo, nessa atividade os alunos deveriam assinalar as equações que são lineares e justificar por escrito aquelas que não são lineares. Para tanto, apresentamos equações com incógnitas de diferentes graus e coeficientes numéricos com diversas formas matemáticas de números reais. Para essa atividade, as incógnitas foram apresentadas com diferentes letras de nosso alfabeto objetivando uma forma de mostrar as variações do conceito que está sendo aprendido.

Ato contínuo, as Atividades 3 e 4 têm por objetivo conceituar a solução de uma EL. Antes dessas atividades, apresentamos um pequeno texto introdutório visando levar os estudantes a refletirem sobre a solução de uma equação do 1º grau de modo a usar esse conhecimento prévio para conceituar a solução de uma EL. Assim, na Atividade 3 - itens *a* e *b* - questionamos os estudantes quanto aos valores que tornam as equações lineares em sentenças matemáticas verdadeiras, trabalhando tanto com equações lineares com 2 e 3 incógnitas, respectivamente. Já no item *c*, perguntamos qual o significado dos valores numéricos que tornaram as equações lineares em sentenças matemáticas verdadeiras. Pretendíamos com isso, favorecer a construção do conceito (construto mental) dos alunos em relação ao significado da solução de uma EL, pois as soluções de uma EL são as que a tornam em uma sentença matemática verdadeira. Por fim, no item *d* queremos levar os discentes a perceberem que uma EL possui infinitas soluções.

Já na Atividade 4 pretendíamos levar os alunos a identificarem variações do conceito de solução de uma EL realizado por meio de exemplos e não exemplos ampliando desse modo, a

compreensão do conceito aprendido. Desse modo, no item *a* apresentamos valores que não eram solução da EL e pedimos para justificar. No item *b* foi disponibilizada uma EL com 3 incógnitas e solicitado que se encontre duas soluções e duas não-soluções para essas equações. Finalmente, no *item c* foram dados dois valores numéricos e o comando é para que os alunos escrevessem uma equação linear na qual tais valores representem a sua solução.

Partindo das ideias conceituais de EL e da solução de uma EL, os alunos se tornaram aptos a conceituarem um SL e a solução de SL, tais conceitos foram explorados na aula seguinte.

3.4.2.2 – Aula 6: conceituando sistema linear e a solução de um sistema linear

Após os estudantes terem contato com o conceito envolvendo as características de uma EL e ainda de sua solução, nessa aula buscamos construir o conceito de SL e da solução de um SL. Para tanto, fizemos uso das Atividades 5, *6* e *7*. Essas atividades estão disponíveis abaixo no Quadro 22:

Quadro 22 - Proposta das atividades 5 a 8.

Atividade 5:
Vamos retomar os sistemas de equações lineares que vimos nas aulas anteriores:
Sistema linear da Situação 1:

$$\begin{cases} b + l = 8 \\ 2b + 4l = 27{,}50 \end{cases}$$

Sistema linear da Situação 2:

$$\begin{cases} B + 2L + C = 9 \\ 2L + 2C = 11 \\ 3C = 10{,}50 \end{cases}$$

Responda:
Quais características você observa na forma matemática de um sistema linear?

_____

Atividade 6: Dê um exemplo:
a) De um sistema linear com duas equações e duas incógnitas.

_____

b) De um sistema linear com três equações e três incógnitas.

_____

Atividade 7:
a) Na aula anterior você compreendeu o conceito de solução de uma equação linear, agora como você explicaria o que é a solução de um sistema linear?

b) Com base na sua resposta do item anterior, encontre a solução do sistema linear abaixo e explique com suas palavras o significado a solução que você encontrou.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Atividade 8
Tendo por base o que você estudou nas duas últimas aulas. Escreva com suas palavras, o que você compreende por:

a) Equação linear: _____
b) Solução de uma equação linear: _____
c) Sistema Linear: _____
d) Solução de uma equação linear: _____

Fonte: Elaborado pelo autor

No Quadro 22 observamos a Atividade 5 a qual teve como objetivo retomar com os estudantes a forma matemática de SL vista ao final da Etapa 1 de nossa organização de ensino. Tal momento da aula, buscou fazer uma conexão entre o entendimento já construído pelos alunos sobre SL com a Etapa 2 de formação do conceito de SL. Desse modo, apresentamos um questionamento aos estudantes sobre quais características eles observaram nos dois SL vistos nas situações 1 e 2 das aulas da Etapa 1. Dessa maneira, esperávamos que os alunos apontassem as formas, ideias matemáticas e conteúdos que eles acreditavam ser inerentes aos dois SL apresentados. Foi um momento no qual que os alunos que estavam dispostos em duplas poderiam explanar suas ideias sobre esse conceito e, caso necessário, poderiam abrir discussões coletivas de modo a se alcançar um consenso. Ainda no Quadro 22 por meio da Atividade 6 solicitamos que após caracterizem um SL na atividade anterior, que eles dessem exemplos de um SL com duas equações e duas incógnitas – item *a* e um SL com três equações e três incógnitas – item *b*.

Dando prosseguimento, a Atividade 7 buscou ampliar com os estudantes a compreensão da solução de uma EL para um SL. Dessa maneira, no item *a* questionamos como o conceito de solução de uma EL pode ser visto para um SL. No item *b* foi solicitado que os alunos encontrassem a solução de um SL com duas equações e duas incógnitas, os quais deveriam ter encontrado x=3 e y=2 cuja resposta esperada era que dissessem que esses valores tornam as duas equações do SL em duas sentenças matemáticas verdadeiras.

Buscando finalizar a etapa 2 de formação de conceito de nossa organização, a Atividade 8 procurou levar os estudantes a sintetizaram sobremaneira os conceitos vistos nas aulas 5 e 6 e encaminhá-los para as aulas da etapa 3 na qual o conteúdo foi definido de maneira formal. Esse foi um momento da aula na qual os estudantes puderam não só responder na folha de

atividades como também debater entre si de modo a chegarem a um consenso das ideias conceituais (construto mental) de EL e SL que aprenderam nas aulas. Para tanto, na Atividade 8 – item *a* solicitamos que os alunos escrevessem com suas palavras o que compreendem por EL e no item *b* a sua compreensão sobre a solução de uma EL. Do mesmo modo, no *item c* foi solicitado que escrevessem o que compreenderam em relação a SL e no item *d* que dissertassem sobre à sua compreensão relativa à solução de um SL.

Finalizando as aulas 5 e 6 da etapa de *formação do conceito,* chegamos à etapa de *definição do conteúdo* a qual explanaremos na subseção a seguir.

3.4.3 Definição do conteúdo

Proença (2021, p. 09) aponta que para esta etapa "as aulas devem focar sobre a definição matemática do conteúdo, de modo a inserir os alunos no entendimento da linguagem simbólico-formal. Isso implica em abordar tanto a definição do conceito matemático [...] quanto os procedimentos algorítmicos de resolução". Deste modo, das aulas 7 a 14 desta organização de ensino, buscamos trabalhar: as definições formais de uma EL e suas soluções; a definição, classificação, solução e os métodos de resolução de um SL.

3.4.3.1 – Aula 7: apresentando a definição formal de uma equação linear e a definição formal da solução de uma equação linear

Para a aula 7 teve início questionando verbalmente os alunos para que apontassem as características vistas por eles nas aulas anteriores concernentes aos conceitos do que é uma EL, retomando assim os conceitos compreendidos na etapa anterior. Após esse momento, apresentamos a definição formal de EL e da solução de uma EL, ambas propostas por Iezzi *et al.* (2016). Buscamos criar uma abordagem na qual ao apresentarmos a linguagem simbólico-formal de EL e suas soluções, pudéssemos relacioná-las com as definições conceituais apontadas pelos estudantes nas aulas 5 e 6 da etapa anterior de *formação do conceito.* O Quadro 23 a seguir, nos mostra sobre a Atividade 9 que diz respeito a definição formal de uma EL:

Quadro 23 - Proposta da atividade 9.

Definição formal de Equação Linear
Equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ é toda equação do tipo:

$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = b$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e **b** são coeficientes reais. Chamamos **b** de **coeficiente** (ou **termo**) **independente** da equação (IEZZI ET AL., p. 97, 2016).

Atividade 9: Em cada equação linear, determine os coeficientes e o termo independente.

$a)\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 8$
Coeficientes: _____
Termo independente: _____

$b)\ x + 2y - 3z = 5$
Coeficientes: _____
Termo independente: _____

$c)\ a + 7b - \sqrt{3}\, c + 4 = 0$
Coeficientes: _____
Termo independente: _____

$d)\ \frac{w}{5} - y = 6$
Coeficientes: _____
Termo independente: _____

$e)\ 1{,}8\, x + \pi y = z + 3$
Coeficientes: _____
Termo independente: _____

Fonte: Elaborado pelo autor

No Quadro 23, vemos a proposta na qual apresentamos a definição formal de EL para, em seguida, solicitar a realização da Atividade 9 na qual os estudantes deveriam identificar em cada EL, os coeficientes e o termo independente. Aproveitamos nessa atividade para colocarmos coeficientes e termos independentes que são números naturais, números positivos e negativos, frações, números decimais e números irracionais. Já em relações as variáveis também mudamos a nomenclatura das incógnitas, sendo uma hora *x*, *y* e *z*, outra hora *a*, *b*, e *c* e assim por diante. Também nos itens *c* e *e* são apresentadas EL nas quais as incógnitas ou coeficientes devem ser manipulados antes da determinação de seus coeficientes e termos independentes. Isso permite o entendimento de variações do conceito e uma ampliação de compreensão conceitual conforme a ideia de Proença (2021).

Após essa atividade, foi dada a definição formal de solução de uma EL, em seguida, apresentamos as Atividades 10, 11 e 12 que podem ser vistas no Quadro 24 seguir:

Quadro 24 - Proposta das atividades 10, 11 e 12.

Definição formal da solução de uma equação linear
Dizemos que a sequência de números reais $(\alpha_1\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é solução da equação $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + a_n\, x_n = b$ se a sentença $a_1 \alpha_1 + a_2\, \alpha_2 + \cdots + a_n\, \alpha_n = b$ for verdadeira, isto é, quando, na equação dada, substituímos

x_1 por a_1, x_2 por a_2, ..., x_n por a_n e, após efetuarmos as operações indicadas, obtemos uma sentença verdadeira (IEZZI ET AL., p. 98, 2016).

Atividade 10: Verifique se os pares ordenados são soluções da equação linear $3x - y = 0$.
a) (1,3)
b) (-2, 5)
c) (4,12)

Atividade 11: Verifique se as triplas ordenados são soluções da equação linear $x - 2y + z = 1$.
a) (5,2,0)
b) (3, -1, 4)

Atividade 12: Encontre uma solução para a equação $x - 4y = 3$.

Fonte: Elaborado pelo autor

Observamos pelo Quadro 24, a apresentação da Atividade 10 para que os alunos verificassem se os pares ordenados eram soluções e da mesma maneira, na Atividade 11 para verificarem se as triplas ordenadas eram soluções. Dessa forma, os discentes poderiam verificar os exemplos e não-exemplos de solução de uma equação linear. Por fim, a Atividade 12 buscou fazer com que os indivíduos encontrassem a solução para a EL. A resolução dessas atividades foi feita numa abordagem na qual os indivíduos compreendessem a relação entre a definição formal de solução de uma EL com a formação conceitual que tiveram na etapa anterior. Dessa maneira, conforme aponta Proença (2021), buscamos propor nessa aula um debate coletivo sobre os entendimentos dos estudantes em relação a estrutura matemática apresentada com as representações de exemplos e não exemplos que foram vistos pelos estudantes durante a formação conceitual (nas aulas 5 e 6).

3.4.3.2 – Aula 8: apresentando a definição de sistema linear 2x2, sistema linear mxn e solução de um sistema linear

Esse momento teve como objetivo, apresentar a definição formal de SL do tipo 2x2, SL do tipo *mxn* e a solução de um SL. Nessa aula usamos para a exposição da aula um projetor multimídia, o *software* Openboard e uma mesa digital para escrever manualmente. Pensamos que essa variação de recursos didáticos ajuda a tornar a aula mais interessante sem perder os objetivos de ensino e aprendizagem pré-estabelecidos. O Quadro 25, mostra como apresentaremos aos estudantes a folha de atividades proposta para essa aula:

Quadro 25 - Proposta das atividades 13, 14 e 15.

Sistema Linear 2x2
Um *sistema linear 2 x 2*, nas incógnitas **x** e **y**, é um conjunto de duas equações lineares em que **x** e **y** são as incógnitas de cada uma dessas equações (IEZZI et al., p. 101, 2016).

Atividade 13: Assinale quais sistemas lineares são 2x2 nas incógnitas x e y:

$A)$ ( ) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 5x - y = -9 \end{cases}$ $B)$ ( ) $\begin{cases} -x + 3y + 5z = 1 \\ 7{,}3\,x + 2y - z = 8 \end{cases}$

$C)$ ( ) $\begin{cases} x + 6y + z = -6 \\ x + 5y + 4z = 2 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ $D)$ ( ) $\begin{cases} x - 7 = 3y \\ 4x - y = 1 \end{cases}$

Sistema Linear m x n
Um conjunto de **m** equações lineares e **n** incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ é chamado **sistema linear m** x **n** (IEZZI et al., p. 103, 2016).

Atividade 14: Determine o tipo dos sistemas lineares *m x n* com *m* equações lineares e *n* incógnitas:

$A)$ $\begin{cases} x + 7y + 2z = 10 \\ 9x + 2y + z = -1 \\ x + 3y - 6z = 5 \end{cases}$ Resposta: _____

$B)$ $\begin{cases} -a + 3b + 5c = 1 \\ 7{,}3\,a + 2b - c = 8 \end{cases}$ Resposta: _____

$C)$ $\begin{cases} m + 6n = -6 \\ m + 5n = 2 \\ 3m + 2n = 1 \end{cases}$ Resposta: _____

$D)$ $\begin{cases} x - 8y = 1 \\ 5x + y = 0 \end{cases}$ Resposta: _____

Solução de um sistema linear
Dizemos que a sequência de números reais $(\alpha_1\ \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é **solução de um sistema linear** de **n** incógnitas se é solução de cada uma das equações do sistema (IEZZI et al., p. 103, 2016).

Atividade 15: Verifique se o par ordenado (5,2) é solução dos sistemas lineares abaixo:

$A)$ $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$

$B)$ $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Sobre o Quadro 27 acima, nele apresentaremos a definição de um SL 2x2 e a Atividade 13 para que a turma pudesse identificar quais tinham essa característica. Após essa atividade, foi apresentada ainda a definição formal de um SL do tipo *m x n* seguido da Atividade 14. Nessa atividade, eles deveriam identificar os tipos de sistemas apresentados, permitindo a compreensão das variações e exemplos do conceito recém explanado.

Finalizando essa aula foi apresentada a definição formal de solução de um SL partindo da definição dada por Iezzi *et al.* (2016). Em seguida, trabalhamos a solução de um SL 2x2 por

meio de verificação na Atividade 15. Tal atividade também foi aberta a um debate coletivo entre o conceito de solução de EL (visto na etapa anterior) ampliado para o conceito de solução de um SL em relação a estrutura matemática e suas representações. Pois em um SL, a solução de uma EL é comum para todas as EL do SL.

3.4.3.3 – Aula 9: apresentando a classificação de um sistema linear e resolução de sistemas lineares 2x2 pelo método da adição

Dando prosseguimento, na aula 9 conceituamos as classificações de um SL em relação à sua quantidade de soluções (SPD, SPI e SI). Após apresentarmos essas classificações, apresentamos o método da adição para resolver um sistema linear 2x2 de modo que na resolução da atividade se aponte a classificação dos exemplos apresentados em relação à quantidade de soluções. Observamos aqui, que os estudantes deveriam ter aprendido tal conteúdo no 8º ano do EF. Nas aulas, ocorreu de alguns alunos saberem tal conteúdo, outros saberem parcialmente, outros não terem aprendido ou terem esquecido. De qualquer forma, o professor explanou detalhadamente os algoritmos do método da adição para todos os alunos. Isso se fez por meio da Atividade 16 visualizada no Quadro 26 a seguir:

Quadro 26 - Proposta da atividade 16.

Classificação de um Sistema Linear

A tabela a seguir apresenta as classificações, abreviaturas possíveis de um sistema linear em relação a sua solução:

Classificação	Abreviatura	Solução
Sistema Possível e Determinado	SPD	Admite uma única solução.
Sistema Possível e Indeterminado	SPI	Admite infinitas soluções.
Sistema Impossível	SI	Não admite soluções.

Resolução de Sistemas Lineares 2x2: Método da Adição

No 8º ano do Ensino Fundamental, você aprendeu sobre sistemas de equações do 1º grau (sistema linear) com duas incógnitas. Agora, vamos retomar a resolução de sistemas dessa natureza. No ensino fundamental, são apresentados 3 métodos de resolução para sistemas lineares com duas incógnitas: método da comparação, método da substituição e método da adição.

Agora juntamente com o professor, vamos revisar como resolver sistemas lineares 2x2 por meio do método da adição. Vamos lá.

Atividade 16: Com a ajuda do professor, resolva e classifique os sistemas lineares abaixo usando o método da adição.

$A)\ \begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ $B)\ \begin{cases} a+2b=6 \\ 3a-b=11 \end{cases}$ $C)\ \begin{cases} x+y=5 \\ 2x-2y=-10 \end{cases}$ $D)\ \begin{cases} t+w=10 \\ t+w=8 \end{cases}$

Agora, é a sua vez. Caso tenha dificuldades, peça ajuda ao professor.

$E)\ \begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=14 \end{cases}$ $F)\ \begin{cases} m+n=-2 \\ 3m+3n=-6 \end{cases}$ $G)\ \begin{cases} a+b=9 \\ 2a+2b=1 \end{cases}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Por meio do Quadro 26, é possível verificar que na Atividade 16 foram apresentadas a resolução de 2 SL do tipo SPD (itens *a* e *b*), um SL do tipo SPI (item *c*) e um SL do tipo SI (item *d*). Na mesma atividade, foi solicitado aos estudantes que fizessem os itens *e* (SL do tipo SPD), *f* (SL do tipo SPI) e *g* (SL do tipo SI). Com a resolução desses três últimos itens da Atividade 16 esperávamos que os estudantes ampliassem e tivessem uma melhor compreensão dos conteúdos abordados nos itens *a*, *b*, *c* e *d*.

O intuito que os discentes apreendam e compreendam o método de adição foi de prepará-los sobremaneira para que aprendessem o método do escalonamento sem grandes dificuldades nas aulas seguintes. A técnica algébrica usada pelo método da adição tem ideias muito simulares a técnica algébrica do escalonamento, haja visto a multiplicação de equações por um número real e a soma e a subtração de equações de um mesmo SL. Além disso, pensamos que, ao trabalharmos os sistemas SPI e SI com um SL do tipo 2x2, facilitaria a compreensão do conceito de resolução ao se trabalhar SL do tipo 3x3 com 3 incógnitas e 3 variáveis. Todo esse processo vai de encontro a ideia dos PCNs (BRASIL, 1998) que apontam que o docente deve buscar estender os conhecimentos que o estudante já possui sobre a resolução de sistemas de equações do tipo 2x2 para SL com 3 equações e 3 incógnitas.

3.4.3.4 – Aulas 10 e 11: apresentando o teorema de Cramer e sistemas lineares 3x3

Nas aulas 10 e 11 apresentamos a definição do teorema de Cramer para SL do tipo 2x2 usando o referencial teórico de Amson, Aguiar Filho e Jamal (2012). Ato contínuo, aplicamos esse teorema por meio da Atividade 17. Salientamos aqui que o conteúdo anterior ao de SL visto pelos alunos foi o de Determinantes, justamente o requerido para ser usado no teorema de Cramer, espera-se, portanto, que os alunos já tenham tomado posse desse conceito matemático. Outro ponto a se observar, é que trabalhamos primeiramente esse teorema para um SL do tipo do 2x2, de modo a facilitar a compreensão de seu algoritmo para, em seguida, aplicá-lo para resolução de um SL de 3 equações e 3 incógnitas. O Quadro 27 mostra como foi abordada a definição do teorema de Cramer e a realização da Atividade 17:

Quadro 27 - Proposta da atividade 17.

Teorema de Cramer

Na aula anterior você aprendeu a resolver um sistema de equações do 1º grau (sistema linear) com duas incógnitas por meio do método da adição. Nesta aula você irá aprender o teorema de Cramer. Por meio deste teorema, você pode resolver sistemas possíveis e determinados (SPD) fazendo o uso de determinantes. Veja a seguir, segundo Amson, Aguiar Filho e Jamal (2012) o que diz o teorema de Cramer:

Seja o sistema $\begin{cases} a_1x + \ b_1y = \ c_1 \\ a_2x + \ b_2y = \ c_2 \end{cases}$

Sejam:

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ O determinante da matriz dos coeficientes

$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ O determinante da matriz de substituição dos termos independentes na 1ª coluna

$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ O determinante da matriz de substituição dos termos independentes na 2ª coluna

O teorema de Cramer afirma que, para D$\neq$ 0 então: $x = \frac{D_x}{D}$ e $y = \frac{D_y}{D}$ (AMSON; AGUIAR FILHO; JAMAL, p. 86, 2012).

Atividade 17: Agora o professor irá lhe apresentar o Teorema de Cramer. Por meio deste teorema, resolva e classifique os sistemas lineares 2x2 a seguir:

$A)\ \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + \ y = \ 11 \end{cases}$ $B)\ \begin{cases} 5\,x + y = 6 \\ -x + 2y = \ 12 \end{cases}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Na segunda parte da aula foi apontada a definição formal de SL do tipo 3x3 seguida da Atividade 18, ampliando assim, o uso do teorema de Cramer de um SL 2x2 para uma SL 3x3. O Quadro 28 elucida como esse momento da aula foi trabalhado:

Quadro 28 - Proposta da atividade 18.

Sistemas Lineares 3x3

Agora, começaremos a estudar os sistemas lineares 3x3 que são aqueles que apresentam 3 equações e 3 incógnitas. Na maioria das vezes, as incógnitas usadas são *x, y* e *z*. Mas podem aparecer nos livros didáticos e você pode usar outras letras sempre que desejar. Esses sistemas também podem ser resolvidos pelo Teorema de Cramer, desde que sejam sistemas possíveis e determinados (SPD).

Atividade 18: Resolva os sistemas lineares abaixo usando o Teorema de Cramer. Peça ajuda ao seu professor caso encontre dificuldades.

$A)\ \begin{cases} x + y + z = \ 6 \\ 2x + y - z = \ 1 \\ 4x + y + 2z = \ 12 \end{cases}$ $B)\ \begin{cases} x + 2y + z = \ 9 \\ 3x + y = -5 \\ 2y + z = \ 11 \end{cases}$ $C)\ \begin{cases} 2x - y + z = \ 3 \\ x + y + 2z = \ 9 \\ -x + 3y + z = \ 7 \end{cases}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Nessas aulas 10 e 11 os alunos foram dispostos em duplas, de maneira que se ajudem mutuamente ao resolverem as atividades propostas, trocando informações e conhecimentos pré-adquiridos e/ou adquiridos com a aula em andamento.

3.4.3.5 – Aula 12: apresentando os sistemas escalonados

Na aula 12 apresentamos a definição formal de SL escalonados de Amson, Aguiar Filho e Jamal (2012) e exemplificamos por meio do Exemplo 1. Dando prosseguimento, apresentamos os 2 tipos de SL escalonados, a saber: quando o número de equações é igual ao número de incógnitas e o SL é SPD; e, quando o número de equações é menor que o número de incógnitas e o SL é SPI. Para esses 2 tipos, resolvemos com os estudantes os exemplos 2 e 3, respectivamente. Para uma melhor compreensão da definição desse conteúdo, solicitamos aos estudantes que fizessem a Atividade 19. O Quadro 29 elucida como foi feita a abordagem de ensino nessa aula:

Quadro 29 – Proposta dos exemplos 1, 2 e 3 e da atividade 19.

Sistemas Escalonados

Consideremos um sistema linear onde em cada equação há pelo menos um coeficiente não nulo. Diremos que o sistema está na forma escalonada (ou escalonado) se o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação (AMSON; AGUIAR FILHO; JAMAL, p. 88, 2012).

Exemplo 1: Veja os exemplos de sistemas escalonados a seguir.

$$A)\begin{cases} x+y+z = 7 \\ 2y-z = 1 \\ 4z = 12 \end{cases} \qquad B)\begin{cases} a+b-3c = 5 \\ b+c = 3 \\ 4z = 12 \end{cases} \qquad C)\begin{cases} 3m+n+p = 8 \\ 2m-6p = -1 \end{cases}$$

Temos 2 tipos de sistemas escalonados:

1º tipo) Número de equações é <u>igual</u> ao número de incógnitas:

Quando isso acontece, o sistema é possível e determinado (SPD). Obtemos o valor de cada incógnita resolvendo o sistema "de baixo para cima".

Exemplo 2: Faça com seu professor o exemplo de sistema escalonado do 1º tipo a seguir:

$$\begin{cases} x+y+z = 3 \\ 2y+z = 2 \\ 5z = 10 \end{cases}$$

2º tipo) Número de equações é <u>menor</u> que o número de incógnitas:

Nesse caso, escolhemos as incógnitas que não aparecem no começo de nenhuma equação (variáveis livres) e as transpomos para o 2º membro (AMSON; AGUIAR FILHO; JAMAL, p. 88, 2012).

Em seguida, para cada variável livre atribuímos um valor arbitrário e resolvemos o sistema nas incógnitas do 1º membro. O fato de atribuirmos valores arbitrários a algumas das incógnitas faz com que o sistema tenha mais do que uma solução e seja, portanto, indeterminado (AMSON; AGUIAR FILHO; JAMAL, p. 88, 2012).

Exemplo 3: Acompanhe com o professor a resolução do exemplo de sistema escalonado do 2º tipo abaixo:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ \quad\; y + z = \;\; 5 \end{cases}$$

Atividade 19: Agora é a sua vez, resolva e classifique os sistemas escalonados a seguir.

$A)\begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ \quad\; y - z = 1 \\ \qquad\; 4z = 4 \end{cases}$ B) $\begin{cases} x + y + 3z = 7 \\ \quad\; y + z = \;\; 6 \end{cases}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Durante a realização dessa atividade, buscamos tirar dúvidas em relação a procedimentos e cálculos incorretos ou incompletos. Um dos objetivos dessa aula foi que os estudantes compreendessem o que é um sistema escalonado para que nas próximas aulas identificassem um SL não escalonado e compreendessem que teriam que fazer o processo de escalonamento para sua resolução.

3.4.3.6 – Aulas 13 e 14: escalonamento de sistemas lineares

Nas aulas 13 e 14, continuamos com o trabalho com os estudantes dispostos em duplas. Para introdução do assunto matemático de escalonamento, apresentamos os Teoremas 1 e 2 de Amson, Aguiar Filho e Jamal (2012) que são importantes para serem aplicados nos algoritmos de resolução por escalonamento.

Visando ampliar a definição do conteúdo de SL no que concerne a resolução de SL do tipo 2x2 para SL do tipo 3x3, na Atividade 20 foram trabalhados os escalonamentos de SL, todos do tipo 3x3, sendo: um SPD (item *a*), um SPI (item *b*) e um SI (item *c*). Nas explanações dos algoritmos de resolução por escalonamento fizemos uma conexão com o método de adição estudado na aula 9, faremos o debate coletivo sobre como o procedimento é análogo seja quando o SL é SPD, quando o SL é SPI (que devemos escolher uma variável livre) e quando o SL é SI (não tem solução). Por fim, os itens *d* e *e*, são respectivamente um SL SPD e um SL SPI, os quais solicitamos aos estudantes para que resolvessem de modo a praticarem o que foi explanado nos itens anteriores. O Quadro 30 traz a luz as atividades propostas aos estudantes para essas aulas:

Quadro 30 - Proposta da atividade 20.

Escalonamento de Sistemas

Antes de falarmos de escalonamento de sistemas lineares precisamos aprender o conceito matemático de sistemas equivalentes seguido de 2 teoremas importantes.

Sistemas equivalentes: são aqueles que possuem a mesma solução.

Teorema 1: Multiplicando-se os membros de uma equação qualquer de um sistema S, por um número $k \neq 0$, o novo sistema S' será equivalente a S.

Teorema 2: Se substituirmos uma equação de um sistema S, pela soma membro a membro, dela com uma outra multiplicada por um número obteremos um sistema S' equivalente a S.

(AMSON; AGUIAR FILHO; JAMAL, 2012)

Atividade 20: Escalone, classifique e resolva os sistemas lineares abaixo:

$A)\ \begin{cases} x+2y+z=8 \\ 2x+5y-z=9 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$ $B)\ \begin{cases} 2x+y-z=8 \\ x-3y=0 \\ 3x-2y-z=2 \end{cases}$ $C)\ \begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x-y+z=2 \\ 4x+4y+4z=2 \end{cases}$

$D)\ \begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x-3y-z=4 \\ 3x-y-2z=1 \end{cases}$ $E)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-3z=4 \\ 3x+2y-2z=5 \end{cases}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Com a Atividade 20 findamos todos os conteúdos previstos de SL e chegou a hora de aplicarmos o que foi aprendido em novos problemas. Foi o momento da etapa 4 de *aplicação em novos problemas* proposta por Proença (2021), a qual dissertaremos na próxima seção.

3.4.4 Aplicação em novos problemas

Nas aulas 15 a 18 trabalhamos a etapa que objetivava aplicar os conceitos e os conteúdos que foram aprendidos na resolução de novos problemas. Proença (2021, p. 10) preconiza os pontos importantes para o bom andamento de sua proposta para esse momento:

> Nesta etapa, as aulas devem ser elaboradas com base na utilização de uma variedade de novas situações ('novos problemas' ou possíveis problemas), as quais visam à transferência da aprendizagem pelos alunos do conceito matemático, bem como dos procedimentos algorítmicos estudados Essas atividades têm por finalidade transferir a aprendizagem dos estudantes do conceito matemático e dos métodos algoritmos que estudaram nas etapas anteriores (PROENÇA, 2021, p. 10).

Diante de tais apontamentos, nas subseções que seguem, buscaremos descrever como se deu a abordagem de ensino visando o conteúdo trabalhado de SL.

3.4.4.1 – Aulas 15 e 16: problemas envolvendo sistemas lineares

Nas aulas 15 e 16, apresentamos a Atividade 21 contendo 5 problemas que foram baseados em duas questões de ENEM e três questões de vestibulares. Um dos motivos de adotar essas situações matemáticas é envolver os alunos do 2º ano que na grande maioria, prestarão a prova do ENEM e de vestibulares no ano seguinte, após concluírem o EM. Verificamos ainda,

que as questões propostas trazem consigo aspectos da vida cotidiana em seus enunciados. Em relação a questões do ENEM, estas envolvem questões de competências e habilidades previstas durante a elaboração dessa prova. As situações matemáticas que escolhemos, acreditamos abordarem a perspectiva de serem um problema advinda das ideias de Proença (2018). Para que isso ocorresse de maneira completa, suprimimos as alternativas de todas as questões propostas. O Quadro 31 mostra sobremaneira as atividades que foram trabalhadas com os estudantes:

Quadro 31 – Proposta da atividade 21.

Problemas envolvendo sistemas lineares
Após aprender os conceitos e conteúdos que permeiam sistemas lineares, nesta aula vamos resolver alguns problemas de vestibulares e de ENEM que envolvem este conteúdo. As alternativas das questões foram suprimidas de maneira a alcançar melhor os objetivos previstos para essa aula.

Atividade 21: Transforme os enunciados das questões a seguir em um sistema linear (naqueles que ainda não tem). Em seguida, resolva os sistemas usando o teorema de Cramer ou a técnica algébrica de escalonamento que você aprendeu nas aulas anteriores.

A) (ENEM/2015 - Adaptada) Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R$ 20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado, cada vez que ele errar o alvo, deverá pagar R$ 10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R$ 100,00. Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo?

B) (FUVEST/1992 - Adaptada)
Carlos e sua irmã Andreia foram com seu cachorro Bidu à farmácia de seu avô. Lá encontraram uma velha balança com defeito, que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Assim, eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:
- Carlos e o cão pesam juntos 87 kg;
- Carlos e Andreia pesam 123 kg;
- Andreia e Bidu pesam 66 kg.

Determine o peso de cada um deles.

C) (UFMS/2018 - Adaptada) O sistema a seguir foi construído com base nas vendas mensais de três vendedores (A, B e C), em que os valores de x, y e z são as quantidades vendidas por cada vendedor.

$$\begin{cases} A: x + 2y + 3z = 14 \\ B: 2x - 3y + 2z = 2 \\ C: -2x + y - 5z = -15 \end{cases}$$

Determine, o produto das vendas dos três vendedores.

D) (ENEM/2020-Adaptada) Em um país, as infrações de trânsito são classificadas de acordo com sua gravidade. Infrações dos tipos *leves* e *médias* acrescentam, respectivamente, 3 e 4 pontos na carteira de habilitação do infrator, além de multas a serem pagas. Um motorista cometeu 5 infrações de trânsito. Em consequência teve 17 pontos acrescentados em sua carteira de habilitação. Qual é a razão entre o número de infrações do tipo *leve* e o número de infrações do tipo *média* cometidas por esse motorista?

E) (UFRN/2001- Adaptada) Três amigos, denominados X, Y e Z, utilizam o computador todas as noites. Em relação ao tempo em horas, em que cada um usa o computador, por noite, sabe-se que:
- O tempo de X mais o tempo de Z excede o de Y em 2;
- O tempo de X mais o quádruplo do tempo de Z é igual a 3 mais o dobro do tempo de Y;
- O tempo de X mais 9 vezes o tempo de Z excede em 10 o tempo de Y.

Determine soma do número de horas de utilização do computador, pelos três amigos, em cada noite.

Fonte: Elaborado pelo autor

Por meio do Quadro 31, vemos que a Atividade *21-a*, os alunos deveriam encontrar um SL do tipo 2x2, que poderiam resolver da maneira que desejarem. A Atividade *21-b* recai um sistema com 3 equações e 3 incógnitas, porém todas as equações apresentam pelo menos uma incógnita com coeficientes nulos, assim poderemos observar como o conhecimento prévio dos alunos poderiam influenciar para a resolução dessa questão. Na Atividade *21-c* é apresentado um problema com o SL já formado. É um SPD que os estudantes poderiam resolver pelo teorema de Cramer ou por escalonamento. A Atividade *21-d* é um problema contextualizado sobre infrações de trânsito que recai em um SL do tipo 2x2, porém a pergunta versa sobre o conceito de razão. Para resolvê-la, os estudantes deveriam saber previamente esse conceito e deveriam prestar muita atenção na etapa de monitoramento da resolução de um problema – de Proença (2018) - haja vista que se acharem o valor das incógnitas o problema ainda não terá sido resolvido de forma total. Por fim, a situação proposta na atividade *21-e* é um SL do tipo 3x3 que exigia que os alunos isolassem o termo independente em cada uma das equações do SL, antes de começarem a resolução seja pelo teorema de Cramer ou por escalonamento.

Em relação as questões da Atividade 21 podemos intencioná-las no pensamento de Proença (2021) que declara que o trabalho do docente em sala deve ocorrer na concepção da RP, avaliando e tornando os alunos cientes das quatro etapas de resolução de um problema (ensinar sobre RP). Se o professor seguir essa perspectiva durante as aulas, pode ocorrer dos estudantes se virem diante de dificuldades na busca de solução das situações novas que lhes são apresentadas. Se isso acontecer, os discentes reconhecerão a situação matemática que querem resolver como um problema.

Outro detalhe importante desta etapa, é que procuramos fazer as atividades das aulas 15 e 16 por meio da perspectiva de uma aula dialogada entre alunos e entre alunos e professor de maneira que possa haver compartilhamento de ideias, de planejamento, execução e monitoramento dos problemas propostos. Para Anastasiou e Alves (2007) a aula dialogada tem por objetivo expor conceitos com uma participação ativa dos estudantes e nela o conhecimento prévio é muito importante. Durante o seu processo, o docente oferece a seus alunos a chance de participarem de forma ativa do processo de ensino e aprendizagem fazendo uso de discussões e questionamentos das questões que lhe são apresentadas na aula. Para Frota (2016), o diálogo nessa estratégia de ensino favorece aos estudantes uma melhoria em relação a análise crítica, a produção de novos conhecimentos, a superarem a passividade e a falta de mobilidade intelectual. Acreditamos que esse processo permeado pelas aulas dialogadas permitiram uma eficiência maior ao docente, de modo sanar os seguintes pontos elencados por Proença (2021):

as dificuldades dos discentes durante as etapas de RP (representação, planejamento, execução e monitoramento); as dificuldades entre contextos de situações e a identificação e representação do conceito matemático.

3.4.4.2 – Aulas 17 e 18: avaliação descritiva

Durante as aulas 17 e 18 buscamos avaliar por meio de uma avaliação descritiva, os conceitos e conteúdos matemáticos aprendidos durante as aulas anteriores relativos ao conteúdo de SL. Pozo (1998, p. 27) aponta que os estudantes devem ter compreensão dos conceitos de maneira a expressá-los com suas palavras afirmando que "não se trata tanto de se o aluno o compreende ou não, mas de como o compreende". Diante disso, a Atividade 22 buscou que o aluno evidenciasse com suas palavras o que entende em relação de conceitos trabalhados na etapa de *formação do conceito*, a saber: equação linear e não linear; SL dos tipos 2x2 e 3x3 e a suas classificações. Nessa atividade foi solicitado que os alunos dessem exemplos e não exemplos de conceitos aprendidos. Desta maneira, retomamos os objetivos de aprendizagem desta etapa propostos por Proença (2021): exploração de exemplos e não exemplos e suas características; apresentação da definição do conceito; apresentação de variações do conceito com exemplos; apresentação de não exemplos do conceito, o que permite a ampliação da compreensão conceitual. O Quadro 32 abaixo mostra essa atividade proposta aos estudantes:

Quadro 32 - Proposta da atividade 22.

Atividade 22: Sobre o conteúdo de sistemas lineares que aprendemos nas últimas aulas. Faça o que se pede: **A)** Escreva o que você entende por uma equação linear e dê 2 exemplos. **B)** Dê 2 exemplos de equações que não são lineares e justifique por que não são lineares. **C)** Escreva, com suas palavras o que é um sistema de equações lineares do tipo 2x2 e do tipo 3x3. Dê um exemplo de cada um deles. **D)** Explique de forma sucinta quais são as classificações que um sistema linear pode ter. Segundo o teorema de Cramer, quando um sistema linear é SPD?

Fonte: Elaborado pelo autor

Dando prosseguimento, na Atividade 23 foi dado um SL e solicitado que os alunos apontem quais situações matemáticas não diziam respeito ao SL e justificassem. O item *23-b* não era uma situação matemática relativa ao SL dado, pois o termo 'diferença' é trocado pelo termo 'soma' na terceira equação. Já o item *23-c* não era um SL, pois as variáveis mudavam em cada uma das três equações (lápis, borracha e caneta na primeira equação; caderno, lapiseira e estojo na segunda equação; e, corretivo e grampeador na terceira equação), tal fato o diferencia

de um SL. Isso está em acordo ao anseio de Proença (2021, p. 09) ao afirmar que “O professor deve propor atividades que levem os alunos a compreenderem propriedades e/ou características do conceito, possibilitando que consigam diferenciá-lo de outros conceitos matemáticos”. O Quadro 33 traz à tona a Atividade 23 que foi trabalhada:

Quadro 33 - Proposta da atividade 23.

Atividade 23: Dado o sistema de equações lineares abaixo, assinale aquela(s) situação(ões) matemática(s) que **não é(são)** equivalente(s) ao sistema dado e, em seguida, justifique:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 2x + 3y + z = 41 \\ x + 2y = 24 \end{cases}$$

A) ( ) Três amigos - Antônio, Bruno e Camila foram em uma sorveteria perto da escola em que estudam. Antônio comprou um picolé de fruta, um picolé de leite e uma casquinha e pagou 20 reais. Já Bruno comprou 2 picolés de fruta, 3 picolés de leite e uma casquinha, gastando 41 reais. Camila comprou um picolé de fruta e 2 picolés de leite pagando 24 reais pela sua compra. Qual o preço do picolé de fruta, do picolé de leite e da casquinha nessa sorveteria?

B) ( ) A soma de três números naturais é 20. Se somarmos o dobro do primeiro, o triplo do segundo mais o terceiro, encontraremos 41. Porém, a diferença entre o primeiro número com o dobro do segundo número é 24. Quais são esses números?

C) ( ) Em uma livraria, se comprarmos um lápis, uma caneta e uma borracha, pagaremos 20 reais. Se comprar 2 cadernos, 3 lapiseiras e um estojo, pagamos 41 reais. Já se comprarmos um corretivo e um grampeador gastaremos 24 reais. Qual o preço de cada um dos materiais escolares dessa livraria?

Justificativa: _____

Fonte: Elaborado pelo autor

A Atividade 24, última atividade de nossa organização de ensino, trouxe uma gama de 5 situações matemáticas com potencial de problemas, sendo: o item *a* um SPD com 2 equações e 2 incógnitas; o item *b* um SPD com 3 equações e 3 incógnitas; o item *c* um SPD do tipo 3x3 no qual os coeficientes são números decimais e o aluno poderia multiplicar todas as equações por 10 para facilitar seu processo de resolução; o item *d*¸ tem um enunciado com excesso de informações que não são necessárias no âmbito de escrita matemática do SL, o qual recairia em um SPI. Mas que o aluno conseguiria resolver usando uma combinação linear da equação encontrada durante o processo de escalonamento; finalizando, o item *e* dizia respeito a um problema que se desdobraria em um SI, que não tem solução e, consequentemente nem a resposta para sua pergunta. Abaixo, vemos o Quadro 34 com a Atividade 24 entregue aos alunos:

Quadro 34 - Proposta da atividade 24.

Atividade 24: Para cada situação matemática abaixo, escreva um sistema de equações e resolva da maneira que desejar:

A) Um estacionamento possui 25 veículos entre carros e motos. Há 88 rodas no total. Determine o número de carros e o número de motos neste estacionamento.

B) A maioria dos homens gostam de comprar roupas e calçados apenas uma vez por ano. André, Bruno e Carlos foram comprar roupas numa mesma loja que havia uma grande promoção. André comprou uma bermuda, 2 pares de meias e um par de sapatos e gastou 220 reais; Bruno comprou 3 bermudas, um par de meias e 2 pares de sapatos e gastou 455 reais; já Carlos comprou apenas 2 bermudas e 5 pares de meias, gastando um total 195 reais. Qual o preço da bermuda, do par de meias e do par de sapatos nessa loja?

C) Em uma padaria, o preço do bolo é determinado pela quantidade de chantili, farinha e recheio presentes em cada receita encomendada. Veja na tabela a abaixo, o preço pago por Pedro, Tiago e João aos comprarem seus bolos nesta padaria:

Cliente	Chantili	Farinha	Recheio	Total (R$)
Pedro	0,1kg	0,5kg	0,4kg	31,00
Tiago	0,2kg	0,7kg	0,6kg	46,00
João	0,3kg	1,2kg	0,5kg	52,00

Com base na tabela acima, determine os valores do chantili, da farinha e do recheio cobrados nesta padaria.

D) Um grupo de 20 amigos foi jogar aquele futebolzinho no final de semana num clube da cidade, no domingo às 9 horas da manhã. Após acabar o jogo, dois amigos estavam com fome e foram para cantina do clube. Na cantina eles verificaram que 4 coxinhas, 2 pastéis e 6 sucos custava 50 reais. Se comprassem 4 coxinhas, um pastel e 4 sucos pagariam 30 reais. Quanto eles gastariam se comprassem apenas 2 pastéis e 4 sucos?

E) José e Maria adoram brincar de jogos de adivinhações matemáticas. José propôs o seguinte desafio para Maria: “eu pensei em dois números, a soma destes números vale 9. Porém, se eu somar o dobro do primeiro com o dobro do segundo número, a soma vale 20”. Em quais números José pensou?

Fonte: Elaborado pelo autor

Pensamos que as questões propostas na Atividade 24 poderiam ser reconhecidas enquanto problemas por acreditarmos irem de encontro aos pensamentos de Proença (2021) que afirmam que devido ao fato de que mesmo os alunos conhecendo os conceitos e processos algorítmicos que serão transferidos nas novas situações, eles necessitarão ainda não apenas da mobilização de conhecimentos matemáticos, mas também de conhecimentos linguísticos e de sua concepção de mundo. Durante esse processo, ao se defrontarem com os contextos propostos, isso exigirá dos indivíduos uma reorganização cognitiva incluindo tanto o conceito que lhes é transferido quanto os previamente aprendidos. Isso ocorre porque cada contexto traz consigo termos e palavras oriundos de diferentes realidades e que necessitam de tradução para linguagem matemática, evidenciando sua complexidade. Portanto, isso diz respeito a realização de uma ressignificação do conceito matemático permeando situações contextualizadas trazidas para o ensino em ambiente escolar.

Dentro desse panorama, findamos a nossa proposta de organização de ensino de SL por meio da RP. Assim, na próxima subseção descreveremos os instrumentos e técnicas de coleta de dados de nossa pesquisa.

3.5 Instrumentos e técnicas de coleta de dados

Lankshear e Knobel (2008) orientam para uma variedade de instrumentos de coletas de dados de maneira a legitimar a pesquisa pedagógica de abordagem qualitativa. Para esses autores, pode ser difícil que os estudantes ofereçam informações de forma espontânea, sobre como se sentem ou sobre o que pensam do transcorrer do processo de ensino e aprendizagem. Para descobrir tais aspectos, o investigador necessita criar contextos de coletas de dados sejam artificiais ou especiais.

Desse modo, buscando evidenciar os resultados de nossa pesquisa, utilizamos nas 18 aulas da nossa organização de ensino, os seguintes instrumentos de coleta de dados: i) a gravação e transcrição de áudio das aulas; ii) fotos da realização das atividades; iii) folhas de atividades entregue pelos estudantes no decorrer das aulas; e, iv) anotações de campo feitas pelo professor pesquisador. Sobre esses instrumentos dissertaremos brevemente a seguir.

3.5.1 Gravação e transcrição dos áudios

A gravação e a transcrição dos áudios de todas as aulas ministradas nos permitiram conhecer melhor o que realmente aconteceu no processo de ensino e aprendizagem desenvolvido em sala de aula. Para Hutchby e Woofftitt (1998) a transcrição de áudios é importante para a análise da conversa sendo um passo que dá início a análise da interação gravada. Duranti (1997, p. 161) fala que a gravação de áudio e suas transcrições “podem abrir novas perspectivas para o entendimento de como as pessoas usam a fala e outros instrumentos nas suas interações cotidianas”. Dentro desse contexto, Lankshear e Knobel salientam que

> Tem sido de particular interesse questões sobre os modos pelos quais o uso da linguagem em classe contribui para definir e constituir o que se considera um aluno bem-sucedido na escola. [...] muitos pesquisadores registraram interações verbais contextualizadas, “fragmentadas”, em salas de aula, reuniões de professores e playgrounds, para melhor entendimento das funções (e efeitos) sociais da linguagem nos ambientes educacionais (LANKSHEAR; KNOBEL, p. 168, 2008).

Desse modo, acreditamos que a gravação e transcrição de áudios nos permitiram entender melhor como se deu as ações do professor pesquisador em sala de aula, bem como as respostas dos alunos a essas ações. Importante apontarmos aqui, que visando a preservação da identidade dos estudantes, nas transcrições de áudio nomearemos os alunos conforme o diário de classe como A1, A2, A3, ... e assim por diante.

3.5.2 Fotos da realização das atividades

Em nossa pesquisa também tomamos uso de fotografias no desenvolvimento das ações de nossa organização de ensino. Foram registrados momentos chaves das aulas com a participação do professor, dos alunos e do professor com os alunos. Tais momentos compreenderam ações de apresentações das equipes na lousa, disposição das equipes durante as aulas e escritas na lousa realizadas pelo professor. Segundo Justo e Vasconcelos (2009) a utilização de métodos visuais aumenta a qualidade da coleta dos dados coletados, vislumbrando seus significados, validade e profundidade trazendo consigo dados autênticos baseados na ação e experiência dos sujeitos investigados. Para Martins (2008) a análise de fotografias permite ao pesquisador ter compreensão e visualização de particularidades do contexto de determinado fenômeno. Para o autor, o uso das fotografias nas ciências sociais tem ajudado no entendimento natural de compreensão de fenômenos humanos e sociais abrindo caminho para análises de questionamentos e experimentos. Mauad (2004) corrobora com essa ideia afirmando que o uso de fotos pactua com a interpretação e a forma de visualizar e entender um fenômeno. Isso ocorre, porque as imagens possibilitam ao pesquisador a recordação de cenas ou a elaboração de novas propostas e ideias nas memórias. Todos esses motivos nos levaram a optar pelo uso da fotografia de modo a colaborar e elucidar com imagens, as ações desenvolvidas em nosso trabalho. Por fim, salientamos que o rosto dos participantes será ocultado de forma a preservar a identidade dos envolvidos na pesquisa pedagógica.

3.5.3 Folha de atividades dos alunos

Também fizemos uso para coleta de dados, das folhas de atividades impressas e entregues aos estudantes no início das aulas. Essas folhas foram preenchidas pelos estudantes com a realização das ações durante as ministrações e devolvidas ao docente ao final de cada aula. Sobre esse instrumento de coleta, Lankshear e Knobel (2008) observam que:

> Os registros que coletam dados escritos do ponto de vista do participante podem oferecer esclarecimentos úteis sobre seus pensamentos. Os registros de participantes também podem assinalar mudanças que ocorram com o passar do tempo, na maneira de pensar ou de perceber algo, podem coletar avaliações pitorescas dos professores, sobre um estudo de intervenção do qual estejam participando, podem atuar como registro do que funcionou ou não funcionou em um estudo de intervenção, a partir do ponto de vista do professor, assim como dos alunos, podem documentar a dinâmica de raciocínio ou os sentimentos dos participantes sobre uma questão ou fenômeno e outras possibilidades relacionadas ao tópico, evento, práticas ou fenômenos que estejam em estudo (LANKSHEAR; KNOBEL, p. 215, 2008).

Desse modo, com as diversas benesses citadas acima, acreditamos que a utilização dos registros dos alunos com a realização das atividades das aulas foi de grande valia para as inferências realizadas na etapa de tratamento dos dados.

3.5.4 Notas de campo

Por fim, outro instrumento para coleta de dados que fizemos uso foi a utilização de notas de campo. Para Godoy (1995, p. 29) - “A organização das notas de campo se dá mediante um processo contínuo em que o pesquisador procura identificar dimensões, categorias, tendências, padrões e relações, desvelando-lhes o significado”. Bogdan e Biklen (1994) citam alguns aspectos importantes a serem observados em uma coleta de dados por meio do uso de notas de campo como: descrição dos sujeitos; reconstrução de diálogos; descrição de eventos especiais; descrição das atitudes e do comportamento do observador. Ainda segundo os autores, tais anotações podem ter uma parte reflexiva feita durante a coleta de dados que podem abarcar sentimentos, problemas, ideias, especulações, dúvidas, impressões, decepções e até surpresas.

Deste modo, achamos conveniente aliar as notas de campo juntamente com os demais instrumentos de coletas de dados por pensarmos que possa haver anotações importantes de acontecimentos e reflexões da ministração das aulas que podem não ser compreendidas ou coletadas nem por áudio, nem por registro de fotografias e nem com a folha de atividades devolvida pelos alunos. O modelo da nota de campo a ser utilizada está no Apêndice C. Nas notas de campo, identificaremos informações importantes como: Identificação de quais aulas da organização de ensino se referem; a data; horário de início; horário de término; e as atividades ou situações vivenciadas. Observamos aqui, que como o professor e pesquisador estava envolvido sobremaneira nas ações da organização de ensino, as notas de campo foram utilizadas principalmente nos momentos que o docente verificou que os outros instrumentos de

coletas de dados não permitiram conhecer a fundo os acontecimentos de momentos importantes inerentes às aulas.

3.6 Procedimentos de coletas de dados

Em relação ao uso de cada instrumento e técnica de coleta de dados, estes foram adotados em todas as aulas. Assim, a gravação de áudios ocorreu do início ao final de cada aula. A folha de atividades foi organizada conforme os Quadros (6 e 22 a 35) e foram entregues ao início de cada aula prevista, recolhida ao final, corrigida, digitalizada e devolvida na aula seguinte. As fotografias foram registradas nos momentos de aula nas quais o professor-pesquisador achou relevantes. E as notas de campo disponibilizadas no Apêndice C foram adotadas para anotações dos dados da aula e de informações relevantes do processo de ensino e aprendizagem que o professor-pesquisador considerou importantes. O Quadro 35 a seguir, resume ao leitor como se deram os procedimentos de coleta de dados para essa pesquisa:

Quadro 35 – Síntese dos procedimentos de coleta de dados.

<table>
<tr><th>Etapas Proença (2021)</th><th>Aulas</th><th>Instrumento/Técnica</th><th>Observações</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>1 a 2</td><td>• Gravação de áudios.
• Folhas entregues aos alunos.
• Fotografias.
• Notas de campo.</td><td rowspan="5">• Áudios gravados do início ao final de cada aula.
• Folha de atividades entregue no início da aula e recolhida ao final.
• Fotografias registradas em momentos importantes a fim de registrar a participação do professor-pesquisador e dos alunos participantes.
• Notas de campo usadas para registrar os dados da aula e anotar informações e observações relevantes do pesquisador durante o decorrer da aula.</td></tr>
<tr><td>3 e 4</td><td>• Gravação de áudios.
• Folhas entregues aos alunos.
• Fotografias.
• Notas de campo.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5 e 6</td><td>• Gravação de áudios.
• Folhas entregues aos alunos.
• Fotografias.
• Notas de campo.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>7 a 14</td><td>• Gravação de áudios.
• Folhas entregues aos alunos.
• Fotografias.
• Notas de campo.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>15 a 18</td><td>• Gravação de áudios.
• Folhas entregues aos alunos.
• Fotografias.
• Notas de campo.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor

Falando sobre o processo de coleta de dados de nossa organização de ensino, no dia 26 de julho de 2022, uma terça-feira, durante duas aulas de 50 minutos, o professor pesquisador se reuniu em sala de aula com os 34 alunos que seriam os participantes de nosso estudo. Foram

explanados os objetivos da pesquisa, a importância da participação dos estudantes e ainda a necessidade de eles trazerem assinados os documentos TCLE e TALE para poderem participar do andamento das atividades das aulas. Além disso, o professor pesquisador comunicou aos estudantes que as atividades seriam realizadas em equipes de 2 ou 3 alunos. Como houve discussões e desentendimentos entre os alunos na formação dessas equipes, o docente optou por fazer a divisão dessas equipes no mesmo dia, anotando os nomes dos membros de cada equipe em uma planilha do *Microsoft Excel*.

A organização de ensino que foi planejada de antemão para inicialmente ter 18 aulas, acabou tendo um total de 26 aulas, sendo realizadas em duas aulas de 50 minutos nas terças e quintas-feiras entre os dias 28 de julho de 2022 e 08 de setembro de 2022. O Quadro 36 a seguir, mostra como se deram o desenvolvimento das aulas implementadas apontando as datas em que ocorreram:

Quadro 36 - Aulas da organização de ensino implementadas.

Etapas de Proença (2021)	Aulas planejadas	Como ocorreram	Datas de cada aula
Uso do problema como ponto de partida	1, 2, 3 e 4	Aula 1	28/07/2022
		Aula 2	28/07/2022
		Aula 3	02/08/2022
		Aula 4	02/08/2022
Formação do Conceito	5 e 6	Aula 5	04/08/2022
		Aula 5	04/08/2022
		Aula 6	09/08/2022
		Aula 6	09/08/2022
Definição do Conteúdo	7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14	Aula 7	11/08/2022
		Aula 8	11/08/2022
		Aula 9	16/08/2022
		Aula 10	16/08/2022
		Aula 11	18/08/2022
		Aula 11	18/08/2022
		Aula 12	23/08/2022
		Aula 13	23/08/2022
		Aula 14	25/08/2022
		Aula 14	25/08/2022
Aplicação em novos problemas	15, 16, 17 e 18	Aula 15	30/08/2022
		Aula 15	30/08/2022
		Aula 16	01/09/2022
		Aula 16	01/09/2022
		Aula 17	06/09/2022
		Aula 17	06/09/2022
		Aula 18	08/09/2022
		Aula 18	08/09/2022
Total de aulas	18 aulas	26 aulas	-

Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Quadro 36, podemos observar que as aulas 5, 6, 11, 14, 15, 16, 17 e 18 que inicialmente eram planejadas para durarem apenas uma aula, acabaram durando duas aulas cada uma. Tal fato acarretou o aumento do número de aulas de nossa organização de ensino de 18 para 26 aulas, cujo motivo será mais bem entendido na seção de análise e resultados.

Outro fator que influenciou na dinâmica das aulas de nossa organização de ensino e que acreditamos importante apontar foi o fato de as datas das aulas coincidirem com um período incessante de dias chuvosos. Com isso, tivemos de 10% a 47% de alunos faltosos em diferentes aulas de nossa organização de ensino, o que acabou por causar a situação de não conseguirmos mantermos as equipes com os mesmos alunos em todas as aulas. Nesse contexto, em algumas aulas ocorreram conflitos entre equipes de estudantes, acarretando o fato de alguns alunos preferirem fazer as atividades de forma individual mesmo com a intervenção do pesquisador para que participassem de alguma equipe. Devido a esse fato, em nossas análises a numeração das equipes não teve os mesmos participantes em todas as aulas. E sempre que se fizer necessário, apontaremos por quais alunos a equipe era formada em cada aula específica.

Outro aspecto, é que nossos instrumentos e técnicas de coletas de dados geraram um material de: 15 horas e 41 minutos de áudios gravados, 181 páginas de áudios transcritos e 319 imagens digitalizadas de atividades e avaliações feitas pelos participantes, 18 notas de campos digitalizadas que foram preenchidas pelo pesquisador e 17 fotografias tiradas pelo docente de momentos do andamento das aulas inerentes a nossa organização de ensino proposta.

Após conhecermos melhor os procedimentos de coleta de nossos dados, a subseção a seguir disserta como se deu nossa proposta para a análise desses dados.

3.7 Procedimentos de análise dos dados

O tratamento dos dados gerados por essa pesquisa foi pautado nos referencias teóricos de análise da pesquisa qualitativa descritiva e interpretativa. Triviños (1987) afirma que a pesquisa descritiva busca fazer a descrição de fatos e fenômenos de uma determinada realidade. Para Gil (2007), a pesquisa descritiva tem como objetivo principal descrever características de um fenômeno ou de uma população ou as relações estabelecidas entre variáveis. Completando essa corrente de ideias, Rosenthal (2014, p. 26) aponta que o método interpretativo de uma pesquisa possibilita “lançar outro olhar sobre esses fenômenos, reconstruir as correlações e os sentidos latentes de casos concretos particulares”. Assim, acreditamos que a análise dos dados gerados por meio de aspectos descritivos e interpretativos será capaz de dar luz e nos permitir

inferências significativas de nossa abordagem de ensino, trazendo a realidade das contribuições que almejamos em nossos objetivos geral e específicos.

Nesse panorama, nossos eixos para análise dos dados dizem respeito às etapas da organização de ensino proposta por Proença (2021). Em relação às três primeiras etapas (uso do problema como ponto de partida, formação do conceito e definição do conteúdo) associamos os eixos 1, 2 e 3. Já a última etapa (aplicação em novos problemas) é vinculada aos eixos 4 e 5. Desse modo, tomando como norte os objetivos específicos de nossa pesquisa, os eixos de análise ficaram definidos da seguinte forma:

***Eixo 1* - compreensão e desempenho dos alunos no uso do problema como ponto de partida para o ensino de SL:** Nesse eixo avaliamos a compreensão e desempenho de acordo com a construção da aprendizagem de cada aluno, relativa ao conteúdo de SL ao resolverem as *Situações 1* e *2* durante a etapa 1 de nossa organização de ensino. Dentro desse panorama, analisamos os dados com base nas etapas de resolução de um problema (representação, planejamento, execução e monitoramento) e na ação de articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo proposta por Proença (2018). Também foram relevantes na análise desse eixo os apontamentos referentes a conhecimentos linguísticos, semânticos, esquemáticos e procedimentais elencados pelo autor e que são necessários para os alunos resolverem os problemas propostos pela atividade.

***Eixo 2* - compreensão e desempenho dos alunos relativos aos conceitos de SL:** Tal eixo visou analisar a compreensão e desempenho dos estudantes ao se depararem com a formação conceitual inerente as características de uma EL e de um SL bem como as soluções de uma EL e de SL, que foram abordadas durante as aulas da etapa 2 de nossa organização de ensino.

***Eixo 3* - compreensão e desempenho dos alunos no processo de ensino de definição do conteúdo de SL:** Nesse eixo, fizemos a análise da compreensão e desempenho dos alunos ao se depararem com o ensino das definições formais e processos algorítmicos de SL abordados na etapa 3 de nossa organização de ensino.

***Eixo 4* - compreensão e desempenho dos alunos na resolução de novos problemas envolvendo SL:** Esse dissertará sobre a análise da compreensão e desempenho dos alunos para resolverem novos problemas visando se ocorreu a "*transferência da aprendizagem* pelos alunos do conceito matemático, bem como dos procedimentos algorítmicos estudados" - (PROENÇA, 2021, p. 10, grifo do autor). Desse modo, foram analisados os dados com base nas etapas de resolução de um problema (representação, planejamento, execução e monitoramento) e no uso

dos conhecimentos linguísticos, semânticos, esquemáticos e procedimentais associados a essas etapas durante a resolução dos problemas propostos.

***Eixo 5* - compreensão e desempenho dos alunos relativos ao conteúdo de SL por meio de avaliação escrita:** Por fim, nesse eixo foram analisados a compreensão e o desempenho dos alunos ao final da etapa 4 de nossa organização de ensino concernente a uma avaliação escrita realizada pelos estudantes. Também foi dada atenção aos conhecimentos linguísticos, semânticos, esquemáticos e procedimentais associados as etapas de representação, planejamento, execução e monitoramento da resolução de um problema.

O Quadro 37 a seguir traz a luz o resumo dos procedimentos de análise dos dados de nossa pesquisa apontando os eixos de análise, as etapas de organização de ensino associadas a cada eixo e os aspectos que foram analisados e interpretados:

Quadro 37 - Resumo dos procedimentos de análise dos dados da pesquisa.

Eixos de Análise	Etapas da organização de ensino associadas	Aspectos analisados e interpretados
Eixo 1: compreensão e desempenho dos alunos no uso do problema como ponto de partida para o ensino de SL	Uso do problema como ponto de partida	- 4 etapas de RP - Conhecimentos linguísticos, semânticos, esquemáticos e procedimentais usados na resolução das situações 1 e 2.
Eixo 2: compreensão e desempenho dos alunos relativos aos conceitos de SL	Formação do conceito	- Características dos conceitos de EL e SL.
Eixo 3: compreensão e desempenho dos alunos no processo de ensino de definição do conteúdo de SL	Definição do conteúdo	- Conhecimentos linguísticos, semânticos, esquemáticos e procedimentais necessários para realização das atividades da etapa.
Eixo 4: da compreensão e desempenho dos alunos na resolução de novos problemas envolvendo SL	Aplicação em novos problemas	- Transferência de aprendizagem de conceitos e algoritmos aprendidos. - 4 etapas de RP. - Conhecimentos linguísticos, semânticos, esquemáticos e procedimentais usados na resolução dos problemas propostos.
Eixo 5: compreensão e desempenho dos alunos relativos ao conteúdo de SL por meio de avaliação escrita	Aplicação em novos problemas	- Transferência de aprendizagem de conceitos e algoritmos aprendidos. - 4 etapas de RP. - Conhecimentos linguísticos, semânticos, esquemáticos e procedimentais usados na resolução das atividades propostas

Fonte: Elaborado pelo autor

Na seção a seguir trazemos os resultados e as discussões dos dados coletados na investigação com a implementação de nossa organização de ensino.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nessa seção, apresentaremos as análises e discussões dos dados coletados relativos aos Eixos 1, 2, 3, 4 e 5 a luz dos nossos referenciais teóricos conforme apontamos na seção de metodologia.

4.1 Eixo 1: análise da compreensão e desempenho dos alunos no uso do problema como ponto de partida para o ensino de SL

Conforme apontamos na seção da metodologia, o Eixo 1 de análise de nosso estudo será voltado a compreender o desempenho da construção da aprendizagem dos alunos ao resolverem os problemas propostos pelas *Situações 1* e *2* na primeira etapa de nossa organização de ensino. Desta maneira, nos propomos a analisar as etapas de resolução de um problema (representação, planejamento, execução e monitoramento) e a ação de articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo proposta por Proença (2018). De maneira a facilitar o entendimento da análise desse eixo, dividimos a análise por aulas (aulas 1 e 2 e, em seguida, aulas 3 e 4), fazendo as descrições, interpretações e inferências pertinentes a cada momento das atividades realizadas.

4.1.1 Análise das aulas 1 e 2 – usando o problema como ponto de partida

O primeiro dia de nossa organização de ensino ocorreu em duas aulas de 50 minutos no dia 28 de Julho de 2022. Foram realizadas as aulas 1 e 2 planejadas, sendo feitas as ações de *introdução do problema* e *auxílio aos alunos durante a resolução* propostas por Proença (2018). Conforme planejado e orienta a ação de *Introdução ao problema* de Proença (2018), o professor pesquisador dividiu os alunos em equipes, entregou a folha de atividades aos estudantes e apontou que poderiam fazer as situações 1 e 2 (problemas como ponto de partida, disponíveis no Quadro 6) da maneira que desejassem. A fala abaixo elucida como ocorreu a abordagem do professor no início da aula:

> *P: Então é o seguinte meu povo. Tudo bem? Então é o seguinte oh. Eu tenho aqui uma atividade, são duas situações matemática aí tá? Então eu vou passar essa atividade pra vocês aqui. Vocês podem resolver da maneira que vocês quiserem, tá bom? Então essa atividade aqui são duas situações matemáticas e eu queria que vocês resolvessem.*

Vocês podem fazer da maneira que vocês quiserem, tá? Não pode usar calculadora e nem celular, tá bom? [...] se vocês acharem a resposta, não falem em voz alta.

Em relação as aulas 1 e 2, estas contaram com a participação de 31 alunos, os quais se dividiram em 15 equipes, sendo 14 duplas e um trio. Inicialmente, os estudantes deveriam resolver a *Situação 1* a qual apontava para um SL de 2 equações e 2 incógnitas. Em seguida, a resolução da *Situação 2* indicava para um SL escalonado com 3 equações e 3 incógnitas. Como o professor orientou para que fizessem da maneira que quisessem, os primeiros 10 minutos da aula o docente auxiliou as equipes com dúvidas iniciais sempre sanando-as em relação a etapa de representação de resolução do problema e indicando que resolvessem da maneira que desejassem.

Dentro de nossa proposta de análise das etapas de resolução de problemas (representação, planejamento, execução e monitoramento) de Proença (2018), verificamos inicialmente dificuldades dos estudantes na etapa de *representação* do problema. Observou-se dificuldades de compreensão do enunciado por parte de alguns alunos nas *situações 1* e *2*, ao não perceberem que os orçamentos 1 e 2 eram oriundos das livrarias A e B, respectivamente e que dessa forma, o preço dos materiais poderia ser diferente. Tal ocorrido nos mostra dificuldades dos alunos relativas a **conhecimentos linguísticos** (reconhecer que os orçamentos 1 e 2 pertenciam a livrarias diferentes). Dificuldades semelhantes foram encontradas nos trabalhos de Proença *et al.* (2020) e Matsuda (2017) com alunos de 9º e 7º ano do EF, respectivamente. Sobre essas dificuldades em nosso trabalho, os diálogos a seguir esclarecem melhor como tais entraves ocorreram:

A31: Professor, o valor da borracha da situação 2 não é o mesmo da situação 1?
A8: Não cara, muda de livraria.
P: Então, a situação 1 é a livraria A e a situação 2 é a livraria B.

A39: Professor, a livraria B muda o valor né?
P: Isso, muda o valor.
A39: Mesmo que sendo o mesmo nome de borracha por exemplo, muda o valor?
P: Igual aqui em Campo Mourão por exemplo, você tem duas livrarias e os preços são diferentes.

Nos diálogos acima vemos que A31 questiona o professor se o valor da borracha da *situação 2* seria o mesmo da *situação 1*, fato que é refutado pelo aluno A8 e confirmado pelo docente. Já nos diálogos que seguem, o aluno A39 tem a dúvida se os valores dos materiais

seriam os mesmos na livraria B e o professor responde exemplificando que na cidade na qual moram duas livrarias poderiam ter preços diferentes para os mesmos produtos. Os diálogos abaixo mostram o diálogo do professor com a aluna A7 nos quais sugestiona o uso de desenhos para resolução do problema da *Situação 1:*

P: E ai?
A7: A gente fez um monte de contas e apagou só.
P: Fez um monte de conta e apagou?
A7: Tem que deixar as contas ou pode apagar?
P: Pode apagar.
A7: É, tem que fazer até dar o resultado.
P: É, você tá tentando por tentativas. E ai? Se você tentasse desenhar lápis, borracha, atribuindo valores. Você acha que ajudava?
A7: Não, é que eu tava tipo... Tentando chegar primeiro num valor com oito e depois multiplicando pra tentar chegar nesse resultado pela quantidade.
P: Sabendo o orçamento 1 pra chegar com 8?
A7: É.
P: Pra chegar com 8...
A7: É... Pra depois chegar a vinte e sete.
P: Pra dai no orçamento 2 chegar a vinte e sete e cinquenta?
A7: Sim.
P: É. É um caminho né. Se colocar um desenho por exemplo, você acha que ajuda?
A7: Sim, mas por quê?
P: Lápis, borracha, atribuir valores. Facilita você atribuir valores e visualizar as respostas.
A7: Desenho, acho que não.
P: Não? Tenta ai, vai tentando.

Nos diálogos supracitados verificamos que o professor sugere a estratégia de desenhos para a aluna A7 resolver a *situação 1* tomando como ponto de partida o orçamento 1 no qual uma borracha Pitágoras e um lápis Newton custam 8 reais e em seguida atribuir esses valores para o orçamento 2 até encontrar o resultado válido. Entretanto, a aluna não se mostrou muito disposta a adotar a estratégia por desenhos para resolução da situação matemática. Conforme o tempo da aula avançava e o professor percebeu que as equipes não avançaram e não se motivavam com a estratégia do desenho, foi o momento de ele sugerir a estratégia de tabela. Os diálogos a seguir apontam como o professor fez tais sugestões aos estudantes A32 e A31:

P: E ai?
A32: Nada.
P: O que vocês acham de fazer uma tabela? Será que ajudava?
A32: Tabela?

P: Tabela. Oh, o orçamento 1 lá, colocar lá lápis, borracha e total. O que você acha? Ir atribuindo valores na tabela. Né?
A32: Será?
P: O total tem que dar 8 reais né? Se você fizer uma tabela atribuindo valores acho que, pode ser que facilite pra vocês. Isso ai?

P: Pra vocês se organizarem melhor. Vocês não acham melhor se vocês utilizassem uma tabela? E você vai atribuindo os valores. Vocês se organizariam melhor. A tabela do orçamento 1 junto com a tabela do orçamento 2. O orçamento 1, a tabela seria por borracha e lápis né e o total que é 8. Você acha que facilitaria?
A31: É, vamo experimentar. Porque no chute não vai.
P: Então, tenta fazer uma tabela.
A31: Dai no orçamento 2 dá vinte e sete e cinquenta?
P: Isso, dai no orçamento 2 dá vinte e sete e cinquenta.
A31: Certinho.
P: Tenta então fazer uma tabela. O que vocês acham? Uma coluna de lápis, uma de borracha, outra do total e tem que dar 8 reais. Joga as possibilidades. Vai, que vocês vão chegar lá!

No primeiro diálogo observamos o professor pesquisador propor o uso de tabela para o aluno A32 apontando como ponto de partida, o orçamento 1 da *situação 1* cuja soma do lápis e da borracha totalizava 8 reais. Já no segundo diálogo verificamos o docente sugestionar ao aluno A31 o uso de tabela de uma forma mais completa em que orienta o uso tanto do orçamento 1 e do orçamento 2. Vemos ainda ao final do segundo diálogo, o professor atuando como um incentivador, afirmando "Vai, que vocês vão chegar lá!", papel esse apontado por Proença (2018).

Com o decorrer da aula, o professor após recomendar as equipes as estratégias de desenho e tabela, se deparou com a dupla de alunas A3 e A17 escrevendo equações na forma algébrica dos orçamentos 1 e 2 da *situação 1* fazendo uso de seus **conhecimentos estratégicos** que tinham sobre o conteúdo algébrico do qual se tratava a situação matemática proposta. Entretanto, o pesquisador verificou que as estudantes não sabiam como resolver as equações que escreveram e percebeu que as alunas estavam fazendo uso da estratégia por tentativa, porém sem êxito. Além disso, percebeu que as alunas usavam apenas valores inteiros para encontrarem a resposta correta, esquecendo-se que poderiam utilizar de valores centesimais em se tratando de valores em reais e centavos de real. Esse episódio aponta para dificuldades da equipe nas etapas de *planejamento* e *execução* da resolução do problema implicando em entraves nos seus **conhecimentos estratégicos** para alcançar a solução almejada. Os diálogos que seguem do professor com a aluna A3 trazem à tona esse momento da aula:

A3: Professor, ajuda a gente aqui.
P: Tá, você fez duas equações né? Você fez duas equações. Só que você sabe resolver essas equações?
A3: Não.
P: Não sabe?
A3: Não.
P: Né. Então você tá atribuindo valores né?
A3: Sim.
P: O que que você acha de cada uma dessas equações você colocar numa tabela?
A3: Ham?
P: Né. Aí você vai atribuindo... Uma tabela lá, a primeira equação lá que é do orçamento 1 né? Você pode atribuir valores pra a e pra b e a soma tem que dar oito.
A3: Aham. Ah, mas eu to fazendo isso.
P: Ah tá, você tá fazendo isso. Mas você não fez propriamente uma tabela. Tem uma chavinha ali né?
A3: Sim, daí eu jogando valores né pra soma dar oito.
P: Aham. Aí tem que solucionar a equação 2.
A3: Parece um pouco aquele conteúdo do gráfico. A gente vai jogando os valores numa tabela.
P: É...Será que precisa necessariamente ser valores inteiros se a gente trabalha com centavos?
A3: É.
P: O que você acha de fazer... faz uma tabela! Uma tabela pra equação 1 né? Você pode atribuir valores né. Então você coloca lá... lápis, borracha né e tem que dar oito a soma. E joga numa segunda tabela em que a soma que você colocou na tabela 1 sirva pra tabela 2, só que a soma tem que dar vinte e sete cinquenta né. Você poderia fazer isso.
A3: Sim.

Por meio dos diálogos, verificamos que as alunas A3 e A17 utilizaram de conhecimentos matemáticos prévios para escreverem as duas equações inerentes ao enunciado do problema proposto. Desse modo, decidiram fazer uso de estratégia de tentativa e erro, e como o professor viu que não lograram êxito na resolução, este propôs o uso de duas tabelas, sendo uma para cada equação por elas corretamente encontradas. Nesse instante, nos deparamos com A3 lembrar do conhecimento prévio sobre funções em que se construía uma tabela para em seguida esboçar o gráfico de uma função no plano cartesiano. Por fim, percebemos que a aluna A3 aceitou a ideia do professor da estratégia usando uma tabela.

De maneira geral, percebemos que os estudantes tiveram mais dificuldades na resolução da *situação 1* do que na *situação 2*, o que aponta para entraves de **conhecimentos estratégicos e procedimentais** na primeira situação apresentada. Desse modo, as equipes investigadas tomaram o uso de diferentes estratégias para resolução da *situação 1*. Outra observação importante que encontramos durante a resolução da *situação 1* foi a dificuldade dos alunos da

etapa de *monitoramento* do problema. Sempre que encontravam uma resposta, eles recorriam ao professor para saberem se a resposta encontrada estava correta, contraponto o pressuposto de verificarem a validade do problema junto ao seu enunciado.

Tendo em vista, o menor grau de dificuldade para resolverem a *situação 2* podemos apontá-la ao fato de ser um SL do tipo 3 por 3 já escalonado, nas quais mesmo não sabendo o conteúdo poderiam solucioná-lo usando a estratégia por tentativas e resolvendo na ordem os orçamentos 3, 2 e 1. Os diálogos abaixo, entre o professor e a aluna A23 resumem como a maioria dos estudantes resolveu a situação 2 usando o método por tentativas e substituindo valores encontrados:

> *P: [...] Beleza. E a situação 2 dai?*
> *A23: Ai a situação 2 a gente pegou essa terceira parte aqui [orçamento 3] e fez dez e cinquenta dividido por três, ai a gente já iria saber o valor de uma caneta. E ai aqui, [orçamento 2] a gente já fez o valor que a gente já tinha conseguido da caneta vezes dois, menos onze e ai a gente descobriu o valor de dois lápis. Dai era só dividir por dois e descobrir o valor de um. E dai, aqui a gente só pegou os valores do lápis e da caneta [substituiu no orçamento 1].*
> *P: Dai vocês foram substituindo dai né?*
> *A23: Sim.*

A próxima subseção traz os resultados e as análises das aulas 3 e 4 da etapa 1 de nossa organização de ensino, na qual ocorreram as ações de *discussão das estratégias dos alunos* e *articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo* propostas por Proença (2018).

4.1.2 Análise das aulas 3 e 4 – discutindo as estratégias e articulando ao conteúdo

Nossas aulas 3 e 4 ocorreram em duas aulas de 50 minutos no dia 02 de agosto de 2022. Tais aulas contaram com a participação de 31 alunos e seguindo o planejado em nossa metodologia, algumas equipes da aula anterior apresentaram na lousa as estratégias adotadas na resolução das *situações 1* e *2*. Concomitantemente às apresentações, os estudantes discutiram com os colegas como procederam para alcançar a solução dos problemas propostos. Logo após esse momento da aula, o professor fez uso das estratégias adotadas pelos alunos para articular o conteúdo matemático de SL.

4.1.2.1 Discutindo e articulando ao conteúdo a situação 1

Sobre o desempenho das equipes participantes na resolução da situação 1, o Quadro 38 abaixo aponta como se deu tal desempenho por meio das etapas de RP (representação, planejamento, execução e monitoramento) e a estratégia adotada por cada equipe de modo a alcançar a solução do problema proposto:

Quadro 38 - Desempenho das equipes na resolução da situação 1.

EQUIPES		ETAPAS DE RP				OBSERVAÇÕES	
Número	Participantes	Representação	Planejamento	Execução	Monitoramento	Estratégia e procedimento de execução	Solução Final
1	A1 e A23	☑	☑	☑	☑	TE	☑
2	A2 e A30	☑	☑	☑	☑	TE	☑
3	A3 e A17	☑	☑	☑	☑	EQ + TE + TAB	☑
4	A4 e A21	☑	☑	☑	☑	TE	☑
5	A5 e A9	☑	☑	☑	☑	TE	☑
6	A6, A20 e A27	☑	☑	☑	☑	TE	☑
7	A7 e A35	☑	☑	☑	☑	TE	☑
8	A8 e A31	☑	☑	☑	☑	TE	☑
9	A10 e A32	☑	☑	☑	☑	SL + MS	☑
10	A13 e A19	☑	☑	☑	☑	SL + MS	☑
11	A15 e A26	☑	☑	☑	☑	TE	☑
12	A18 e A40	-	-	-	-	-	-
13	A24 e A29	☑	☑	☑	☑	TE+ SL + MS	☑
14	A25 e A39	☑	☑	☑	☑	TE	☑
15	A28 e A38	☑	☑	☑	☑	TE	☑

Legenda:
EQ: Equação; MS: Método da Substituição; TE: Tentativa e Erro; TAB: Tabela;
☑: Correta; -: Não fez.
Fonte: Elaborado pelo autor

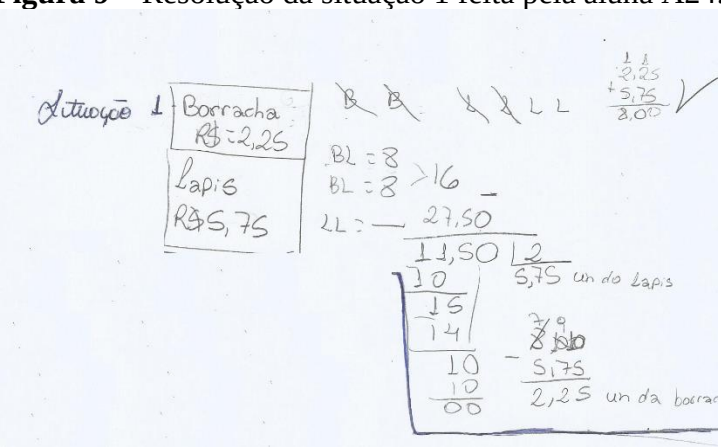
Por meio do Quadro 38, verificamos que das 15 equipes participantes, 14 chegaram à solução final correta do problema proposto pela *situação 1*. Já uma equipe (equipe 12) abriu de fazer a resolução na folha de atividades devolvida ao professor. Dentro as equipes investigadas, a grande maioria escolheu a estratégia de resolução por tentativa e erro (equipes 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 14 e 15). A equipe 3 adotou uma combinação de estratégias escrevendo a equação, usando tabelas e tentativa e erro. As equipes 9 e 10 escreveram o SL com as duas equações relativas aos orçamentos 1 e 2 e resolveram por meio do método da substituição. A equipe 13 apresentou duas soluções para a situação 1, a primeira por tentativa e erro feita pela aluna A24 e a segunda pelo de SL e do método da substituição feito pelo aluno A29.

Sobre o andamento das aulas 3 e 4 que abarcaram a ação de *discussão das estratégias dos alunos*, o professor solicitou as equipes aquelas que queriam apresentar como fizeram a *situação 1.* A equipe formada pelos alunos A29 e A24 apresentaram duas estratégias distintas conforme mencionamos no parágrafo anterior. O aluno A29 apresentou sua proposta de resolução na qual escreveu o SL com duas equações e duas incógnitas e, em seguida, fez a resolução por meio do método da substituição. Tal fato nos discorre para o aluno evoluindo bem em todos os conhecimentos do processo de resolução do problema: (i) traduziu as informações do texto em uma representação mental **(conhecimento linguístico);** (ii) traduziu os termos matemáticos e suas relações com a álgebra, escrevendo duas equações **(conhecimento semântico);** (iii) escreveu duas equações com duas incógnitas relativas aos dois orçamentos apresentados no enunciado do problema **(conhecimento esquemático)**; (iv) Traçou o plano de solução do SL por meio do método da substituição **(conhecimento estratégico);** e, (v) Executou o método da substituição solucionando o problema **(conhecimento procedimental).** Dessa forma, a posse do aluno nesses cinco conhecimentos elencados possibilitou a ele obter sucesso em todas as etapas *(representação, planejamento de resolução do problema)* apontadas por Proença (2018). Já a aluna A24 fez por tentativas e explicou que usou o raciocínio lógico conforme vemos nos diálogos abaixo:

> *A24: Eu usei mais a lógica na verdade. Porque tava falando assim: uma borracha mais um lápis dá oito. Ai duas borrachas mais quatro lápis dá vinte e sete e cinquenta. Ai eu sei a cada uma borracha com um lápis dá oito. Então eu tiro aqui, b e l igual a 8. Ai vai sobrar dois lápis e eu sei que juntando isso daqui, dá dezesseis. Então l e l vai ser igual a dezesseis menos o valor total que deu. Que vai dar onze e cinquenta. Então, dois lápis são onze e cinquenta. Dividido por dois pra dar o valor unitário, que vai dar cinco e setenta e cinco. É... Então cada lápis é cinco e setenta e cinco. Ai pra descobrir o valor da borracha é só fazer cinco e setenta e cinco menos oito que vai dar dois e vinte e cinco.*
> *P: Na verdade o contrário ali, oito menos cinco e setenta e cinco.*
> *A24: Aé professor, mas tá certo a resposta.*
> *P: É, mais tem que arrumar. É... mais só explica de novo pro pessoal. Pessoal! [chamando a atenção de toda a turma]. A24. Como que ficou só o início ai? Pessoal! [chamando novamente a atenção da turma toda]. Como que você colocou ali? Você colocou que o lápis e a borracha...*
> *A24: A cada um lápis com uma borracha dá oito reais. Então eu sei que se eu juntar dois lápis com duas borrachas daqui, vai dar dezesseis reais. E o que sobrar do valor, ai é o valor de dois lápis, que é o que tinha sobrado aqui [apontando para a resolução na lousa], dai eu divido por dois pra dar o valor unitário de cada lápis.*
> *P: Conseguiram raciocinar desse jeito pessoal? [falando para turma toda].*
> *A17: Sim, ela fez diminuindo o valor do lápis.*

Por meio dos diálogos, observamos que a aluna A24 resolveu a *situação 1* multiplicando o orçamento 1 por dois e diminuindo o orçamento 2. Dessa maneira, restaram que menos 2 lápis custava -11,50. Dessa maneira ela dividiu os valores por -2 e encontrou que um lápis custava 5,75 reais. Por fim, a aluna diminuiu de 8 o preço do lápis encontrando que a borracha custava 2,25 reais. Nesse contexto de resolução vemos que a estudante foi capaz de realizar corretamente seu plano de solução e percorrê-lo com êxito até a solucionar o problema proposto. Tais circunstâncias apontam para um sucesso da aluna em relação aos **conhecimentos estratégicos e procedimental.** A Figura 9 abaixo traz a luz como a aluna resolveu o problema proposto:

Figura 9 – Resolução da situação 1 feita pela aluna A24.



Fonte: Elaborada pelo autor

Já a equipe formada pelas alunas A3 e A17, conforme vimos na subseção anterior, embora tivessem conseguido escrever o SL formado pelas duas equações não sabiam como resolvê-lo usando um processo matemático. Dessa forma, as alunas adotaram um misto de estratégia por tentativa e por tabela para encontrarem a solução. Os diálogos a seguir mostram a explanação das alunas para construírem o caminho até encontrarem a solução da *situação 1:*

> *A3: Oh eu comecei fazendo a equação a mais b que dá igual a oito. E depois a outra equação que dá 2a mais 4b igual a vinte e sete e cinquenta.*
> *P: Então você começou fazendo por equação. E o que que seria o azinho então ali?*
> *A3: Então. O a... O a vai ser a borracha e o b é o...*
> *P: O lápis dai né?*
> *A3: É, o lápis.*
> *P: Aham. Ai vocês viram que vocês não conseguiriam fazer por equação, é isso?*
> *A3: É, ai eu tentei isolar o x, mas dai eu achei mais a fácil a maneira da tabela.*
> *[...]*

P: Como que você fez a tabela?
A3: Aqui então eu coloquei valores de a. Valores de a, valores de b e o valor total.
P: Então da tabela você colocou os valores de a, de b e do total?
A3: Aham. Dai eu...
P: Do orçamento 1 ou do 2?
A3: Na verdade foram duas tabelas né. A tabela 1 e a tabela 2.
A17: A gente fez duas tabelas.
[...]
A17: Na verdade a gente foi tentando os valores na folha e a gente chegou no resultado.
A3: É... Quatro lápis.
A17: Na verdade a gente fez uma somatória [apontando para a tabela do orçamento 1]. A gente fez quatro mais quatro, oito.
P: Aham.
A17: Depois a gente fez três mais cinco, oito. Todos pra números inteiros.
P: Aham. Então vocês pegaram a tabela do orçamento e foram jogando valores né.
A17: Isso. A gente foi somando até dá oito. Mas só usava número inteiro.
A3: Ai né, a gente chegou a números não inteiros [números decimais positivos e com vírgula].
[...]
P: Ai vocês foram fazendo... A tabela B, a segunda dai, o orçamento...
A17: Aqui a gente colocou em uma só. Tá, tem duas tabelas.
P: Ai você jogou uma tabela pro orçamento 2?
A17: Isso.
P: Então pessoal, elas faziam aqui. A soma dá oito, tá pessoal? E lá... Tinha que dar vinte e sete e cinquenta, é isso né?
A3: Sim.
[...]
A17: É, dai a gente foi mudando né. As vezes o real, as vezes o centavo. Porque não tava dando os cinquenta centavos no final ou tava faltando o real. Eu sei que ficou meio confuso. Mas no caso a gente fez a tabela, fez a somatória. E ai depois a gente foi multiplicando até dar. E a gente foi alterando. É, a gente foi mais por tentativa.
P: É... Vocês fizeram um misto, de equação, tabela e tentativa né?
A17: É... Ai no final foi mesmo, pra poder encontrar o valor correto.

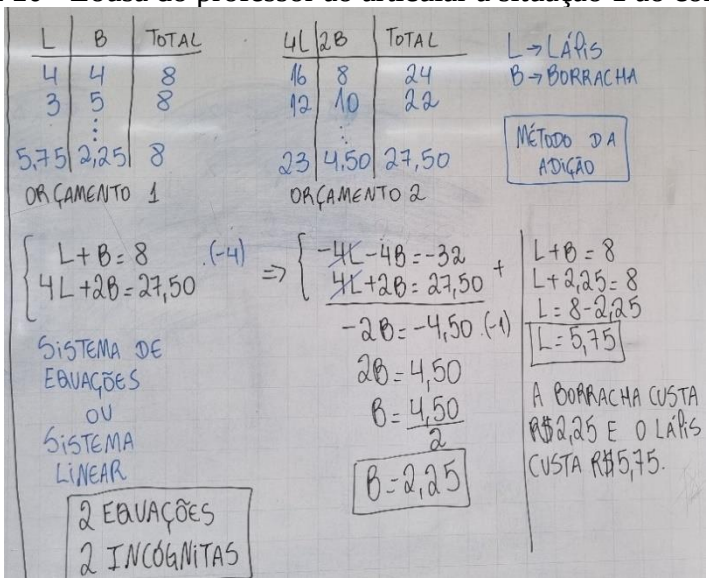
Por meio dos diálogos percebemos que a equipe formada pelas alunas A3 e A17 apresentou dificuldades iniciais na etapa de planejamento **(conhecimento estratégico)** da resolução do problema, pois embora ao escrevessem corretamente o SL, não sabiam como fazer para resolvê-lo. Para contornar esse problema, modificaram seu planejamento **(conhecimento estratégico)** recorrendo ao uso de duas tabelas, sendo uma para o orçamento 1 e outra para o orçamento 2. Nesse percurso, verificaram que não lograram êxito ao atribuírem valores inteiros para encontrarem o valor do lápis e da borracha (etapas de *execução* e *monitoramento)*.

Dessa forma, por meio de seus **conhecimentos estratégicos e procedimentais** voltaram atrás e na etapa de *planejamento* decidiram usar números que chamaram de “não inteiros”, ou seja, números decimais com valores em reais e centavos de reais. Procedendo dessa maneira,

as alunas por meio de diversas tentativas, conseguiram encontrar os valores solicitados. Sousa e Proença (2019), em pesquisa do conteúdo de equação do 1º grau com alunos do 7º ano do EF, encontraram estudantes com dificuldades de escolhas de estratégias para resolução do problema. Nessa pesquisa, os autores apontaram que os investigados monitoram o caminho de resolução, percebiam erros corrigindo-os sempre que necessário.

Após o momento dessas apresentações o professor deu continuidade a aula, com a ação de *articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo* sugerida por Proença (2018). Para tanto, recapitulou a estratégia do método da substituição apresentada pelo aluno A29 e usou como ponto de partida para sua explanação a estratégia de tabela feita pela equipe das alunas A3 e A17. Nesse panorama, o docente articulou com os alunos a forma matemática de um SL do tipo 2 por 2 e sua resolução pelo método da adição, tendo em vista que o aluno A29 já havia apresentado aos colegas a resolução pelo método da substituição. A Figura 8 mostra sobremaneira como o professor ficou a lousa com as anotações do professor após esse momento da aula:

Figura 10 - Lousa do professor ao articular a situação 1 ao conteúdo.



Fonte: Elaborado pelo autor

Após finalizar as ações de *discussão das estratégias dos alunos* e de *articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo* da *situação 1*, chegou a vez de serem realizadas as mesmas ações para a *situação 2.* Os resultados e análises desse momento da aula é o que apresentamos na subseção a seguir.

4.1.2.2 Discutindo e articulando ao conteúdo a situação 2

No tocante ao desempenho dos pesquisados na resolução do problema proposto pela *situação 2*, o Quadro 39 a seguir mostra como ocorreu esse desempenho dando ênfase às quatro etapas de RP (representação, planejamento, execução e monitoramento) e apontando a estratégia de resolução escolhida pelas equipes participantes:

Quadro 39 - Desempenho das equipes na resolução da situação 2.

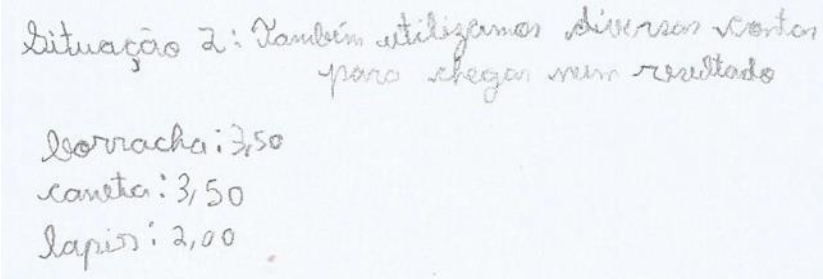
EQUIPES		ETAPAS DE RP				OBSERVAÇÕES	
Número	Participantes	Representação	Planejamento	Execução	Monitoramento	Estratégia e procedimento de execução	Solução Final
1	A1 e A23	☑	☑	☑	☑	TE	☑
2	A2 e A30	☑	☑	☑	☑	TE	☑
3	A3 e A17	☑	☑	☑	☑	EQ + MS	☑
4	A4 e A21	☑	☑	☑	☑	TE	☑
5	A5 e A9	☑	☑	☑	☑	TE	☑
6	A6, A20 e A27	☑	☑	☑	☑	TE	☑
7	A7 e A35	-	-	-	-	-	-
8	A8 e A31	☑	☑	☑	☑	TE	☑
9	A10 e A32	☑	☑	☑	☑	EQ + MS	☑
10	A13 e A19	☑	☑	☑	☑	EQ + MS	☑
11	A15 e A26	☑	☑	x	x	TE	x
12	A18 e A40	☑	☑	x	x	TE	x
13	A24 e A29	☑	☑	☑	☑	EQ + MS	☑
14	A25 e A39	☑	☑	☑	☑	TE	☑
15	A28 e A38	☑	☑	☑	☑	TE	☑

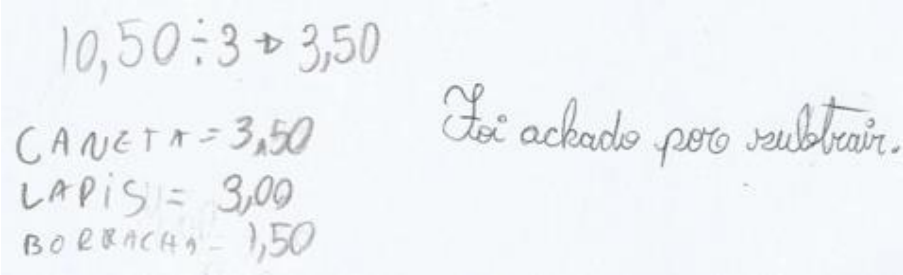
Legenda: EQ: Equação; MS: Método da Substituição; TE: Tentativa e Erro; ☑: Correta; x: Incorreta; -: Não fez.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em um olhar sobre o Quadro 39, verificamos que das 15 equipes participantes, 12 chegaram a solução final correta do problema proposto pela situação 2. Sendo que a equipe 7 não fez a resolução e as equipes 11 e 12 encontraram uma solução incorreta apontando para entraves nas etapas de *execução* e *monitoramento* da RP com dificuldades em **conhecimentos procedimentais**. A Figura 11 abaixo mostra a resposta apresentada pelas equipes 11 e 12:

Figura 11 - Dificuldades das equipes 11 e 12 na resolução da situação 2.

Equipe 11 

Equipe 12 

Fonte: Elaborada pelo autor

Pela Figura 11 acima, vemos que a equipe 11 acertou corretamente os preços da caneta (R$ 3,50) e do lápis (R$ 3,00), entretanto erraram o preço da borracha apontando R$ 3,50 quando o correta seria R$ 1,50. Já a equipe 12, errou apenas o preço do lápis inferindo ser 3 reais quando a resposta correta deveria apontar 2 reais. Dentre as estratégias adotadas, 10 equipes usaram a tentativa e erro e 4 equipes optaram por escrever 3 equações e resolveram usando o método da substituição partindo da equação mais simples.

Da mesma maneira que procedeu na *situação 1*, o professor pesquisador solicitou as equipes de alunos aquelas que queriam apresentar aos demais colegas como fizeram a resolução da *situação 2* conforme a ação de *discussão das estratégias dos alunos* proposta por Proença (2018). Como a aula já durava mais de uma hora e percebia-se o cansaço dos estudantes, dessa vez o professor teve muitas dificuldades para encontrar uma equipe ou equipes que aceitassem discutir com os colegas as estratégias adotadas. Aconteceram muitos pedidos de nota extra para apresentar, até que o professor conseguiu convencê-los da importância de compartilharem suas experiências e do seu conhecimento. Desse modo, após muita insistência, apenas a equipe 13 formado pelos alunos A25 e A39 aceitou apresentar a estratégia de resolução. Essa equipe fez por tentativas, substituindo os valores encontrados no orçamento 3, depois no orçamento 2 e por fim, no orçamento 1. Os diálogos abaixo mostram a explanação dos alunos em relação à estratégia adotada por eles:

A25: Então. No orçamento 3, diz que três canetas custam dez e cinquenta. Então pegou dez e cinquenta e dividiu pra três. Que dá né, três e cinquenta. Então a gente sabe que cada caneta é três cinquenta. Ai no orçamento 2: dois lápis de marca Newton e duas canetas. É duas canetas. Então... Três e cinquenta mais três e cinquenta que vai dar sete, que é as duas canetas. E, a diferença. Então a gente pegou onze menos sete, que dá quatro.
A39: Por que que você tá tremendo Paula?
A25: Para então. Termina você.
A39: Vai termina ai.
A25: Não. Vai, termina aqui A39.
A39: Eu não vou não professor, eu fiz mas não sei explicar.
A25: Então, você que fez.
P: Então não interrompe mais ela. A25 você está indo super bem, pode continuar. Vai A25.
A25: Tá. Esse é onze de dois lápis menos o preço das canetas, que dá quatro. Então a gente vai fazer: quatro divido por dois, que vai dar dois, é óbvio. Que é o preço da borracha, não? Faz aqui A39 [risos]. Que é o preço do lápis, que vai dar 2 reais. Dai no orçamento 1 a gente vai ter dois lápis. Então a gente sabe que lápis é 2 reais. Então vai ser os dois lápis e mais três e cinquenta da caneta que dá sete e cinquenta. E ai...
A39: Tira do último valor lá.
A25: Tira do último? É, pega o nove que é o preço de tudo, menos sete. Sete e cinquenta. Que dá um e cinquenta que é o preço da borracha. E assim a gente descobriu o preço. E o preço de tudo.
A39: Boa A25!

Pelo diálogo, percebemos que os alunos A25 e A39 perceberam na etapa de *planejamento* da resolução do problema que poderiam resolver o problema começando inicialmente pelo orçamento 3, traçando assim o plano de solução por meio de seus **conhecimentos estratégicos.** De posse desse plano, encontraram o valor da caneta no orçamento 3. Em seguida, na etapa de *execução* por meio de seus **conhecimentos procedimentais**, substituíram esse valor no orçamento 2, obtendo assim o valor do lápis. Por fim, com os dois valores já encontrados e substituindo esses valores na equação 1, encontraram o valor do lápis, solucionando assim o problema proposto pela *situação 2.*

Ao fim da discussão das estratégias usadas pela equipe acima, o professor fez a ação de *articulação das estratégias dos alunos* ao conteúdo, escrevendo de forma direta as equações de cada orçamento, obtendo assim o SL com três equações e três e resolvendo o sistema que já estava escalonado. Isso ocorreu devido ao fato da maioria das equipes terem feito por tentativa e as equipes que fizeram a estratégia algébrica não quiseram apresentar na lousa. Dessa maneira, o docente articulou o conteúdo conforme planejado na Quadro 21.

De forma análoga à *situação 1,* também observamos em muitos diálogos algumas equipes de alunos com dificuldades na etapa de *monitoramento* da resolução do problema. Pois

sempre que encontravam a resposta, recorriam ao professor pesquisador para saberem se a mesma estaria correta.

Finalizando a análise do Eixo 1, a próxima subseção mostra o desempenho dos estudantes de forma quantitativa e qualitativa concernente a resolução dos problemas propostos por meio das *situações 1* e *2*.

4.1.3 Observações acerca do desempenho dos alunos na etapa 1

Em relação as estratégias adotadas pelas equipes para resolverem as *situações 1* e *2*, conforme os Quadros 38 e 39, verificamos que 10 de 15 equipes adotaram a estratégia por tentativa e erro nas situações 1 e 2, preterindo assim as estratégias de desenho e tabela sugeridas pelo professor no andamento das aulas. Sobre esse panorama em nossa pesquisa, os dados encontrados nos levam a verificar que embora tenhamos incentivado o uso de caminhos de resolução que as equipes preferissem, apesar de terem contato com a álgebra desde os anos finais do EF, apenas 4 equipes usaram de seus **conhecimentos esquemáticos** para verificarem o esquema dos problemas propostos como pertencentes a um conteúdo algébrico nas *situações 1* e *2*.

Mesmo em se tratando de alunos de EM, quando se depararam com a *situação 1* que envolvia um SL de duas equações e duas incógnitas já vistos geralmente no 8º ano do EF, apenas quatro equipes usaram seus conhecimentos previamente aprendidos **(conhecimentos estratégicos e procedimentais)** de métodos de adição ou da substituição para resolvê-lo. Quando olhamos para as estratégias de resolução da *situação 2*, observamos o mesmo panorama: a maioria resolvendo por tentativa e apenas quatro equipes adotando a estratégia de resolução algébrica.

As equipes 11 e 12, ao adotarem a estratégia por tentativa e erro, resolveram de forma equivocada a *situação 2*. Tal equipe calculou o preço da caneta corretamente, porém acabaram não avaliando os valores encontrados do lápis e/ou da borracha no contexto do enunciado do problema. Dessa maneira, encontramos uma dificuldade de **monitoramento** na resolução do problema, haja vista que os alunos não verificaram que os valores encontrados não condiziam com o enunciado proposto pela situação matemática. Akamine e Proença (2022) também encontraram alunos de 6º ano do EF com entraves na etapa de **monitoramento.** Nessa investigação, os pesquisadores também apontaram que os alunos não buscaram verificar a

resposta correta no contexto do problema e não revelaram uma atitude de rever a resolução percorrida.

Sobre o uso recorrente da estratégia de tentativa e erro, Morais (2012) encontrou alunos do 2º ano do EM de Portugal com dificuldades para representar situações naturais para linguagem algébrica recorrentes de um pensamento algébrico ainda em formação. Da mesma forma, Oktaç (2018) ao pesquisar alunos de EM do México e do Uruguai verificou dificuldades semelhantes apontando ser necessário um trabalho do professor de modo a desenvolver estratégias para esses entraves em sala de aula.

Nesse contexto, Falcon (2009) fez uma pesquisa com 9 alunos de EM do Estado do Texas nos Estados Unidos. Nesse estudo, o autor verificou que os alunos preferiram a estratégia de tentativa e erro para resolverem problemas equivalentes a SL antes de terem contato com o esse conteúdo. Já após aprenderem a definição do conteúdo de SL, a estratégia preferida foi a do escalonamento. No panorama dessa pesquisa, o autor percebeu que os estudantes conheciam as estratégias desenvolvidas, mas tinham dificuldades para desenvolvê-las na etapa de **execução.** Sobre esse fato, o autor aponta que a "falta de compreensão conceitual dos estudantes na resolução de equações os impede de completar o processo para resolver um sistema linear contendo duas ou três equações" (FALCON, 2009, p. 16, tradução nossa). Assim, vemos a importância da etapa da *formação conceitual* no ensino de SL presente em nossa organização de ensino, a qual dissertaremos sobre sua análise na próxima subseção.

4.2 Eixo 2: análise da compreensão e desempenho dos alunos relativos aos conceitos de SL

O eixo 2 fará a análise das aulas 5 e 6 da segunda etapa de *formação do conceito* de nossa organização de ensino. Dentro desse contexto, buscamos analisar a compreensão e o desempenho dos alunos com a formação conceitual concernentes ao conteúdo de EL e SL abordada durante as aulas planejadas. Visando uma melhor organização e compreensão da análise, separamos as aulas planejadas 5 e 6 nas subseções que seguem.

4.2.1 Análise da aula 5 – formando o conceito de EL

A aula 5 planejada de nossa organização de ensino, devido ao desenvolvimento das atividades em sala de aula, aconteceu durante 2 aulas de 50 minutos realizadas no dia 04 de agosto de 2022. Participaram dessa aula um total de 29 alunos, sendo 14 equipes divididas em

13 duplas e um trio em que foram trabalhadas as atividades 1 a 4 (disponíveis nos Quadros 22 e 23) buscando formar o conceito de EL com os estudantes. De modo a facilitar as análises, separamos as atividades nas quatro subseções a seguir.

4.2.1.1 Analisando a atividade 1

Nessa atividade, no item *a* apresentamos o Quadro 1 com equações que eram lineares e solicitamos que os estudantes apontassem as características que observavam em uma equação linear. Do mesmo modo, no item *b* apresentamos o Quadro 2 com equações não-lineares e os alunos tinham que apontar as características que verificaram. A Tabela 3 a seguir aponta as respostas apontadas pelas 14 equipes e a quantidades de equipes que apontou cada característica de uma EL e de uma equação não-linear:

Tabela 3 – Características apontadas pelas equipes na atividade 1.

Tipo de equação	Características	Número de equipes	%
Equação linear	A variável deve ter expoente 1	11	78,6%
	Os coeficientes numéricos são números reais	10	71,4%
	As variáveis não podem se multiplicar	3	21,4%
	As variáveis podem ficar no numerador	5	35,7%
	As EL podem ter operação de adição e subtração entre os termos	8	57,1%
	As EL podem ter mais de uma variável	3	21,4%
	Podemos usar letras diferentes em uma EL	8	57,1%
	Podemos multiplicar números e letras	1	7,1%
	Temos sinais positivos e negativos na EL	4	28,6%
Equação não-linear	As variáveis podem ter expoente diferente de 1	12	85,7%
	As variáveis podem estar no denominador	10	71,4%
	Podemos multiplicar as variáveis	10	71,4%

Fonte: Elaborada pelo autor

A Tabela 3 nos aponta que a maioria das equipes conseguiu compreender e apontar características importantes de uma EL como: a variável deve ter expoente 1 (78,6%); os coeficientes numéricos são números reais (71,4%); as EL podem ter operação de adição e subtração entre os termos (57,1%); e, podemos usar letras diferentes em uma EL (57,1%). Já em relação a uma equação não-linear, os estudantes apontaram as características mais importantes, como: as variáveis podem ter expoente diferente de 1 (85,7%); as variáveis podem estar no denominador (71,4%); e, podemos multiplicar as variáveis (71,4%).

Em relação a resolução da atividade 1, entre as 14 equipes participantes, 10 responderam de maneira correta apontando as características inerentes a uma EL e uma equação não-linear.

As outras 4 equipes tiveram dificuldades na tradução de termos matemáticos, conhecer seus significados e relacioná-los com os entes matemáticos envolvidos. Assim podemos elucidar essas dificuldades relacionando as respostas das equipes na folha de atividades devolvida ao professor:

A1 e A23: Tem expoente variado é igual a 1 [sobre as incógnitas de uma EL].
A28 e A35: Tem potências.
A5 e A9: Não pode haver nem multiplicação e nem divisão.
A10 e A32: Não pode ser multiplicado e nem dividido.

Observamos acima que A1 e A23 dizem que o expoente das incógnitas é variado e é igual a 1, o que não pode ocorrer simultaneamente. Já as demais equipes fazem afirmações que não nos permitem concluir se são relativas as incógnitas, aos coeficientes ou a EL como um todo. Salientamos aqui que as dificuldades de compreensão dessas equipes puderam ser sanados no momento de consenso feito pelo professor na lousa, em que as equipes expuseram aos colegas as características encontradas durante a resolução da atividade, na qual a maioria estão apontadas na Tabela 3 vista acima.

Sobre o andamento da aula de modo a chegar as respostas que observamos na Tabela 3, o professor pesquisador observou que muitas equipes começaram a comparar os dois quadros de modo a encontrar as diferenças entre equações lineares e não-lineares e assim chegassem a características inerentes a cada uma. O diálogo abaixo mostra a equipe formado pelos alunos A25 e A39 fazendo essa comparação e concluindo junto com o professor que uma das características de uma EL é que as variáveis devem ser do primeiro grau:

A39: Professor!
P: Fala senhor A39.
A39: Todas aqui tem elevado né?
P: Você tá indo na letra b e nem fez a letra a ainda?
A39: Mas eu to olhando aqui oh.
P: Ah você tá comparando a letra a com letra b, entendi! Tudo bem. E o que que você acha?
A39: Então, todos os números aqui são elevados, o que não acontece na primeira aqui.
P: Eles tem expoentes então? Quando a letra... Quando a variável não tem expoente, quanto que ele vale?
A39: Não sei não professor.
P: Ah não. Mas quando não tem expoente, quanto é? A colega ajuda vai. Ai A25, quando não aparece expoente na letra, é quanto?
A25: [Gesticulando com a mão para dizer que é um].

P: É um né. Então você já conseguiu oh. Você já flagrou né. Você olhando o quadro 2, já flagrou o quadro 1 né. Que que você observa?
A39: Que aqui [na variável] tem expoente, só que não aparece.
P: Então, na equação linear, quanto que é o expoente [da variável]?
A39: Um.
P: E nas demais que não são, pode ser expoente só um?
A39: Não.
P: Oh... Já manjou já. Já viu outra característica.

Pelo diálogo acima, vemos que o aluno A39 ao comparar os quadros 1 e 2, percebe que no quadro 2 havia expoentes nas variáveis, o que não acontecia no quadro 1. Com a ajuda do professor e sua colega, ele consegue compreender que as variáveis do quadro 1 que não tinham expoente, na verdade tinham expoente igual a um. Dessa maneira, com o auxílio do professor a equipe conseguiu distinguir uma característica inerente a EL como outra que não era de uma equação não-linear.

No próximo diálogo, podemos observar a equipe formado pelas alunas A2 e A30 se deparar com uma dificuldade no entendimento do enunciado da atividade, na qual a aluna A30 pensa se tratar de uma resolução de equação do 2º grau usando a fórmula de Bhaskara:

A2: Professor.
P: Oi A1 e A30.
A30: Professor, eu to muito louca ou isso aqui dá pra resolver com Bhaskara?
P: Não é pra resolver, eu quero que você identifique as características. Eu quero as características.
A2: Então, eu acho que esse aqui daria e esse aqui daria.
P: Dá pra resolver com Bhaskara?
A2: É.
P: Mas no quadro 1 ali, é... você observa que tem equação do 2º grau no quadro 1? Bhaskara é equação do 2º grau né?
A30: Eu sei que equação do 2º grau tem que estar elevado ao quadrado né.
P: Isso. E o que que você observa nos expoentes das letras, todas as letras são as variáveis ou incógnitas né ai do quadro 1. Qual que é o expoente delas? O que que você observa?
A2: É... [pausa para pensar].
P: Quando a variável não tem expoente, qual que é o expoente?
A30: Um.
P: Todo mundo tem expoente 1 ali nas variáveis do quadro 1?
A2: Sim.
P: É isso. Todo mundo tem expoente um na letra?
A30: Não.
P: Você acha que não?
A30: Não.
P: Qual que não tem expoente um ali no quadro 1?

A30: Aqui oh [apontando para a folha].
P: Não... Mais raiz de três é um número né.
A30: Não. To falando desse daqui oh, 4n.
P: 4n. E qual que é o expoente do n? É um.
A30: Ah tá.
P: Quando não aparece, o expoente é um.
A30: Ah tá.

No contexto do diálogo acima, vemos uma dificuldade inicial das alunas A2 e A30 com o enunciado da atividade proposta, que solicitava que se apontasse características de uma EL. Nesse sentido, a aluna A30 observou as EL (que são equações do 1º grau) e quis resolvê-las usando a fórmula de Bhaskara. Proença *et al.* (2020) em sua pesquisa com alunos do 9º ano do EF também encontraram estudantes com dificuldades de compreensão da atividade proposta na qual não identificavam o objetivo solicitado pelo enunciado das atividades propostas.

Por meio do diálogo supracitado, é possível ver que a intervenção do professor ajudou a aluna A30 a compreender que o expoente das variáveis das equações do Quadro 1 era 1 e, que, portanto, não se tratava de equações do 2º grau que são resolvidas pela fórmula de Bhaskara. Dessa forma, a aluna também compreendeu que quando uma variável não tem expoente, esse vale um. Em outro momento, nos deparamos com a aluna A30 com outra dificuldade de o termo 4n apresentava expoente 4 e não um. Fonseca (2016) trabalhando o conteúdo de progressão aritmética com alunos do 2º ano do EM também percebeu estudantes com dificuldades de interpretação de enunciados de atividades e manipulação algébrica que necessitavam ser tratadas. Sobre esse contexto, em nossa pesquisa visando dar auxílio e contornar os obstáculos encontrados pelos estudantes, o papel de intervenção do docente foi fundamental para a compreensão da aluna no sucesso para realização da atividade. Pouco tempo depois, a aluna A1, faz um questionamento em relação a uma EL poder ter uma variável no denominador comparando os quadros 1 e 2 com a ajuda do professor:

P: E ai, flagraram o que não é EL A1 e A23?
A1: O denominador não pode ser incógnita ou não?
P: O que que acontece né, aqui no Quadro 2, a equação 3, o t tá no denominador né?
A1: Sim.
P: E não é uma equação linear.
A1: Então ele não se enquadra.
P: Não se enquadra né. Então isso é uma característica?
A1: Isso que eu to em dúvida né, porque aqui só mostra no denominador.
P: Só que o quadro 1, na equação 3 a incógnita tá em cima, que é o numerador.
A1: Sim.
P: E no quadro 2, na equação 3 a variável tá embaixo. Entendeu a diferença das duas?

A1: Sim.
P: Então quer dizer que numerador, é equação linear. E no denominador?
A1: É... Ela não é.
P: Com variável no denominador, ela não é.
A1: Não é.

Observamos acima que a aluna A1 compreende que uma EL pode conter uma incógnita no denominador, o que não ocorre em uma equação não-linear. Isso aponta para um entendimento da estudante em sua formação conceitual. As dificuldades de formação conceitual apontadas por nossa pesquisa nessa subseção, também foram observadas por Gonçalves e Proença (2020) em sua investigação com alunos do 1º ano do EM com o conteúdo de equação do 2º grau. Sobre esse fato, os autores apontaram que os estudantes investigados estavam ainda na fase de desenvolvimento do processo de formação conceitual, o que trazendo para nosso estudo é o que estava ocorrendo no momento da realização da atividade 1.

Após a realização da atividade 1, os alunos realizaram a atividade 2 envolvendo EL a qual analisaremos na próxima subseção.

4.2.1.2 Analisando a atividade 2

A atividade 2 (disponível no Quadro 23) continha exemplos e não-exemplos de EL e equação não-lineares e solicitava que os alunos assinalassem as EL e justificassem as que não eram EL. O Quadro 40 mostra como se deu o desempenho das equipes participantes na resolução da atividade 2 mostrando as respostas assinaladas (RA) e o desempenho dos estudantes nas justificativas (JUST) apresentadas:

Quadro 40 - Desempenho das equipes na resolução da atividade 2.

Repostas Esperadas 2.1 – Assinalar alternativa *a* e justificar as alternativas *b* e *c* 2.2 – Assinalar alternativa *e* e justificar as alternativas *d* e *f* 2.3 – Assinalar alternativas *h* e *i* e justificar a alternativa *g*							
		Item 2.1		**Item 2.2**		**Item 2.3**	
Equipes	Participantes	RA	JUST	RA	JUST	RA	JUST
1	A1 e A23	a ✓	b ✓ c ✓	e ✓	d ✓ f ✓	h ✓ i ✓	g ✓
2	A2 e A30	a ✓	b ✓ c ✓	e ✓	d ✓ f ✓	h ✓ i ✓	g ✓
3	A3 e A17	a ✓	b ✓ c ✓	e ✓	d ✓ f ✓	h ✓ i -	g ✓
4	A4 e A16	a ✓ c x	b ✓	e ✓	d ✓ f ✓	h ✓ i ✓	g ✓

5	A5 e A9	a ✓	b ✓ c ✓	e ✓	d ✓ f ✓	h ✓ i ✓	g ✓
6	A6, A20 e A27	a ✓	b ✓ c ✓	e ✓	d ✓ f ✓	h ✓ i ✓	g ✓
7	A8 e A31	a ✓	b ✓ c -	e ✓	d - f -	h - i ✓	g -
8	A10 e A32	a ✓	b ✓ c ✓	e ✓	d ✓ f ✓	h ✓ i ✓	g ✓
9	A13 e A19	a ✓	b ✓ c ✓	e ✓	d ✓ f ✓	h ✓ i ✓	g ✓
10	A15 e A26	a ✓	b ✓ c -	-	-	h ✓ i ✓	g ✓
11	A18 e A40	a ✓ c x	b ✓	d x	e - f -	g x i ✓	h -
12	A24 e A29	a ✓	b ✓ c ✓	e ✓	d ✓ f ✓	h ✓ i ✓	g ✓
13	A25 e A39	a ✓	b ✓ c ✓	e ✓ f x	d ✓	h ✓ i ✓	g ✓
14	A28 e A35	a ✓	b ✓ c -	e ✓	d ✓ f -	h ✓ i ✓	g -

Legenda:
RA: Resposta Assinalada; JUST: Justificativa; ✓: Correta; x: Incorreta; -: Não fez.
Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Quadro 40 observamos que no item 2.1, as equipes deveriam assinalar a alternativa *a* inerente a uma EL e justificar o porquê das alternativas *b* e *c* serem equações não-lineares. Assim, observamos que 12 das 14 equipes pesquisadas marcaram corretamente a alternativa *a* sendo que as equipes 4 e 11 marcaram as alternativas *a* e *c*, sendo essa última de maneira equivocada. Em relação as justificativas apontadas, vemos que a maioria fez de maneira correta, porém as equipes 7, 10 e 14 deixaram de realizá-las. Tais equipes não justificaram o motivo pelo qual a alternativa *c* não apontava um exemplo de uma equação não-linear.

Já no item 2.2 no qual se deveria assinalar a alternativa *e* que era um EL e justificar as alternativas *d* e *f* que não eram ELs, apontamos que 12 equipes assinalaram a resposta correta. Entretanto, a equipe 10 não resolveu esse item e a equipe 11 marcou de maneira incorreta o item *d* e não justificou as alternativas que considerou como sendo de equações não lineares.

Por fim, no item 2.3 cujas respostas corretas a serem assinaladas eram as alternativas *h* e *i* e a justificativa a ser dada por não ser uma EL era a alternativa *g* foi realizada de maneira correta por 11 equipes. Porém, o a equipe 3 deixou de assinalar a alternativa *i*, a equipe 7 a alternativa *h* e equipe 11 marcou a alternativa *g* de maneira equivocada. Sobre o desempenho nas justificativas no item 2.3, as equipes 7, 11 e 14 deixaram de realizá-la sendo que todos os demais a fizeram de modo correto.

Percebemos pelo Quadro 40 que a maioria das equipes foi capaz de apontar exemplos de EL e justificar apontando características de não-exemplos para as não ELs. Esse apontamento de exemplos e não exemplos vai de encontro as ideias de Klausmeier e Goodwin (1977) e Proença (2021) num caminho para a *formação conceitual* e do *construto mental* de EL por parte dos estudantes. O Quadro 41 abaixo traz sobremaneira as justificativas apresentadas pelas equipes participantes no tocante as alternativas que continham equações não-lineares:

Quadro 41 – Justificativas das equipes na resolução da atividade 2.

Item	Alternativas com equações não-lineares	Justificativas apresentadas pelas equipes	Equipes
Item 2.1	$b)\ a^2 + b^3 + \sqrt{c} = 25$	*- Está elevado [as variáveis].*	1, 11 e 14
		- As variáveis são diferentes de 1 [os expoentes das variáveis].	2, 5, 9 e 10
		- Possui expoentes diferentes de 1.	3, 6, 7 e 12
		- Possui expoente maior que 1	4, 8 e 13
	c) m + np = 10	*- Está multiplicado [as variáveis].*	1
		- Há multiplicação no [termo] np.	2
		- Possui multiplicação de incógnitas.	3, 5, 6, 8, 9, 12 e 13
		* Disse que era EL, assim não justificou.	11
		** Não justificou.	4, 7, 10 e 14
Item 2.2	d) $a^2 + b^3 = 10$	*- Possuem expoentes das variáveis maiores que 1.*	1, 4, 8, 11, 13 e 14
		- [O expoente] da variável é diferente de 1.	2 e 5
		- [As variáveis] possuem expoentes diferentes de 1	3, 6, 9 e 12
		*Não fez.	10
		**Não justificou.	7 e 14
	f) 10/a + b = 6	*- Denominador é incógnita.*	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12 e 13
		*Não justificou.	7, 10, 11 e 14
Item 2.3	g) xyz = 27	*- Está sendo multiplicado [as variáveis].*	1, 4 e 8
		- Há multiplicação [entre as variáveis].	2, 3, 10, 12 e 13
		- Não podemos ter multiplicação entre as incógnitas.	5, 6 e 9
		- Disse que era EL, assim não justificou.	11
		*Não justificou.	7 e 14

Fonte: Elaborado pelo autor

Ao analisarmos o Quadro 41, podemos ver que a maioria das equipes deram justificativas parecidas quando se depararam com exemplos de equações que não eram lineares. Assim, para todos os itens da atividade 2: (i) as justificativas para as alternativa *b* e *d* concentraram-se em apontar que as variáveis tinham expoentes diferentes de 1 e portanto tais exemplos eram de equações não lineares; (ii) as justificativas para as alternativas *c* e *g* indicaram para o fato de que a multiplicação entre as incógnitas referenciava para exemplos de equações que não eram lineares; e, (iii) As respostas justificatórias da alternativa *f* direcionavam para a incógnita presente no denominador da fração indicar um exemplo de equação não linear.

Dessa forma, vemos que os alunos caminharam em sua *formação conceitual* de modo conforme a visão de Pozo (1998) serem capazes de dizerem com suas próprias o conceito aprendido (construto mental) sobre ELs. Além disso, conforme apregoam Klausmeier e Goodwin (1977) e Proença (2021) a maioria das equipes foi capaz de apontar os exemplos e não exemplos do conceito estudado por meio das características aprendidas sobre este conceito.

Salientamos que as equipes 4, 7, 10, 11 e 14 que apresentaram dificuldades na resolução da atividade 2, seja marcando alternativas incorretas ou deixando de marcar alternativas corretas acabaram por não fazerem justicativas em relação as alternativas não assinaladas e, desse modo, não foi possível fazer inferências quantos as justificativas apresentadas por essas equipes.

Com a finalização das atividades 1 e 2, saímos da formação conceitual de EL e aprofundamos esse conceito discutindo a sua solução. Isso ocorreu por meio das atividades 3 e 4 que analisaremos a seguir.

4.2.1.3 Analisando a atividade 3

A atividade 3 (disponível no Quadro 23) buscou trabalhar a *formação do conceito* da solução de uma EL. Desse modo, no item *a* usamos a EL $x+y=10$ como ponto de partida, solicitando aos estudantes que apontassem valores para x e y que tornassem a EL em uma sentença matemática verdadeira. Do mesmo modo, o item *b* traz a equação $a + b - c = 0$ e também solicita os valores que a tornam uma sentença matemática verdadeira. De posse da resolução desses dois itens, o item *c* questiona os investigados quanto aos significados dos valores numéricos que tornam uma EL em uma sentença matemática verdadeira. Assim, se esperava que os alunos respondessem que tais valores numéricos correspondem a solução da EL. Por fim, o item *d* referencia sobre a quantidade de soluções que uma EL apresenta, cuja resposta esperada é que as equipes digam que uma EL apresenta infinitas soluções. O Quadro 42 nos mostra a síntese das respostas apresentadas pelas equipes para cada um dos itens da atividade 3:

Quadro 42 - Respostas apresentadas pelas equipes na atividade 3.

Item	Enunciado	Respostas	Equipes
a	Na equação linear $x + y = 10$, quais valores para x e para y tornam a equação	(1;9)	2, 13 e 14
		(2;8)	14
		(3;7)	1
		(4;6)	1, 2, 4 e 5

	linear uma sentença verdadeira?	(4,35; 5,65)	9
		(4,5;5,5)	3 e 12
		(5;5)	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 e 12
		(6;4)	3, 5 e 7
		(7;3)	8, 9, 11, 12, 13 e 14
		(8,2)	13
		(9;1)	3, 4 e 8
b	E na equação linear *a + b – c = 0*, quais valores para *a*, *b* e *c* tornam a equação linear uma sentença verdadeira?	(1;1;2)	5 e 12
		(1;10; 11) (15; 100; 115)	12
		(2, 1, -3) – **Resposta Incorreta**	13
		(2;4;6)	14
		(3;1;4)	5
		(3;5;8)	6
		(3;4;7) (4;9;13)	9
		(4;3;7)	7
		(4;4;8)	11
		(4;5;9)	1
		(5;2;7)	4 e 5
		(5;5;10)	1, 2, 6 e 10
		(5;6;11) (7;7;14) (10;3;13)	8
		(5;8;13) (8;1,5) (8;2;10)	3
		(6;6;12) (16;4;20)	2
		(7;3;10)	4
c	O que significam para as equações lineares os valores numéricos que as tornam em sentenças matemáticas verdadeiras?	*- Tornam a equação verdadeira.*	1 e 4
		- As soluções das equações.	2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13 e 14
		- Encontrou o resultado.	10
		*Não respondeu.	7
d	Observando os itens *a* e *b* o que você pode observar em relação a quantidade de soluções de uma equação linear?	*- Possui infinitas soluções.*	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 e 13
		- Possui várias soluções.	5, 9 e 14
		- Tem mais de uma solução.	10
		- São várias e diversas soluções.	11
		*Não respondeu.	7

Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Quadro 42, verificamos que no item a, todos as equipes conseguiram encontrar diferentes soluções para a EL supracitada. Sendo que a maioria das equipes usou números naturais para as incógnitas *x* e *y*. Nesse sentido, apenas as equipes 3, 9 e 12 usaram números decimais para apontarem soluções para EL dada. Já no item b, com uma EL de três incógnitas apenas equipe 13 formado pelos alunos A25 e A39 se equivocou apontando a solução a=2, b=1 e c=-3 cujo sinal negativo para o valor de *c* foi colocado de maneira incorreta, apontando uma dificuldade para executar corretamente o algoritmo do cálculo matemático**.**

Já os itens c e d foram feitos corretamente por 13 equipes e deixou de ser feito pela equipe 7 formada pelos alunos A8 e A31. Esses dois itens falavam sobre o valor numérico tornar a EL em uma sentença matemática verdadeira (item c) e sobre a quantidade de soluções de uma EL (item d). Vemos que as respostas corretas das equipes para esses itens são análogas a mesma ideia: no item c – os valores numéricos que tornavam a equação em uma setença

matemática verdadeira eram a solução da EL; e, no item d – uma EL possui infinitas soluções. Nesse contexto, vemos mais a *formação conceitual* dos alunos investigados ser construída com sucesso, pois os estudantes investigados foram capazes de expressar com suas próprias palavras (construto mental) o conceito estudado conforme salienta Pozo (1998).

O diálogo a seguir, mostra o professor discutindo com alguns alunos sobre a solução dos itens a e b e já encaminhando a resposta dos alunos para os itens c e d:

> *P: O que significa que x mais quatro é igual a cinco, pessoal? O que significa eu falar que a solução é x igual a um? [Indagando sobre o enunciado antes da atividade 3].*
> *A39: Que um mais quatro vai dar cinco.*
> *P: Que ele torna aqui, a sentença matemática verdadeira. Quando você resolve uma equação e acha que o x vale um aqui no nosso exemplo. Esse um deixa a equação em uma sentença matemática verdadeira. Olha aqui oh, um mais quatro é igual a cinco. Por isso que o x vale um. Porque se eu somar um mais quatro vai dar cinco, tá bom? Só que equação linear, ela tem mais variáveis não tem? Então, oh lá na atividade 3, eu gostaria que vocês respondessem oh. [Lendo o item a] Na equação x mais y é igual a dez, na letra a né. Quais valores para x e quais valores para y tornam a equação linear uma sentença matemática verdadeira?*
> *A39: Qualquer valor que soma dê dez.*
> *P: Como que é A39?*
> *A39: Acho que qualquer valor que a soma dê dez já vai deixar uma sentença verdadeira.*
> *P: Lembra que equação linear vai estar aparecendo mais de uma letra. Vocês concordam com o que o A39 disse?*
> *T: Sim.*
> *P: Vai ter mais de uma solução?*
> *T: Sim.*
> *P: Coloca uma ai, coloca duas. Coloca até umas três se você achar né. Vocês concordam então que vai ter infinitas soluções. X mais y é igual a dez, quais as possibilidades? É isso que eu quero que vocês coloquem, tá bom?*
> *A18: Professor, tem que colocar quantos valores?*
> *P: Eu to pedindo um só. Vocês entenderam pessoal? Quais valores que dá x mais y igual a dez?*
> *A39: Um mais nove. Oito mais dois.*
> *P: Coloca uns três tá bom. Precisa ser só número inteiro?*
> *A3: Não.*

Pelo diálogo podemos constatar que o professor explica o enunciado que está antes da atividade 3 que fala sobre a solução de uma equação do primeiro grau buscando encaminhar a analogia para uma EL. É ai que o aluno A39 conclui para o item a, que a soma dos valores de x e y igual a 10 tornaram a EL em uma sentença matemática verdadeira, mostrando a compreensão desse fato pelo estudante. Logo em seguida, os estudantes são provocados pelo professor que pergunta “Vai ter mais de uma solução?” e vários respondem “Sim”. Ato

contínuo, vemos o aluno A18 já percebendo que existem várias soluções e perguntando "Professor, tem que colocar quantos valores?". Todas essas falas apontam para a compreensão dos estudantes tanto para a solução de uma EL bem como para a quantidade de solução que esse tipo de equação possui, objetivos que traçamos na metodologia para essa atividade.

Com a atividade 3 vimos que as equipes investigadas foram capazes de ampliar o conceito de EL estudado nas atividades 1 e 2, dessa vez com o ensino com foco no conceito da solução de uma EL por meio de exemplos com 2 incógnitas e, em seguida com 3 incógnitas. Além disso, os pesquisados conseguiram ter a compreensão do significado de uma solução de uma EL e ainda da quantidade de soluções de uma EL. Todos esses aspectos vão de encontra as ideias de Proença (2021) para a etapa de *formação do conceito* na qual os alunos devem ter contatos com exemplos do conceito e suas características de modo a construírem com suas próprias palavras (construto mental) do conceito estudado, mostrando assim sua compreensão e entendimento do que aprenderam.

Finalizando a aula 5 com os estudantes, a atividade 4 que faremos a análise na próxima subseção, buscou ampliar a formação conceitual com estudantes quando se depararam com o conceito de solução de uma EL.

4.2.1.4 Analisando a atividade 4

A atividade 4 (disponibilizada no Quadro 23) e última atividade da aula 5, conforme vimos em nossa seção de metodologia, no item a, mostrou uma solução falsa para uma EL e solicitou que os alunos analisassem e justificassem sua validade. Em seguida, o item b solicitava que as equipes apontassem duas soluções e não soluções para um EL de 3 incógnitas. E finalmente, o item c dava a solução de um EL e pedia aos estudantes que escrevem uma EL válida para aquela solução. Dentro desse contexto, observamos que essa atividade ocorreu já no final da segunda aula com os estudantes já cansados e acabou sendo a atividade em que as equipes tiveram o desempenho mais abaixo em relação ao acerto das respostas elencadas. O Quadro 43 mostra como se deu o desempenho das equipes na atividade 4:

Quadro 43 – Desempenho das equipes na atividade 4.

Item	Enunciado	Respostas das equipes	Equipes
a	Na equação linear d + e = 8, se considerarmos d = -2 e e = -6, terei a solução dessa equação? Justifique.	*- Não, pois a solução seria -8.*	1, 5, 9 e 13
		- Estaria devendo 8, então a solução é falsa.	2 e 8
		- Não, pois os valores antes e depois do sinal de igual deveria ser os mesmos.	3

		- Não pois a soma dos valores numéricos é -8 e na EL é 8	4, 6
		- Sim, pois teria a solução, pois -2-6 é 8, devido a regra de menos com menos [resposta incorreta].	10
		- Será, só que o resultado seria negativo [resposta incorreta].	11
		Não, pois os valores não deixam a EL em uma sentença matemática verdadeira.	12 e 14
		*Não respondeu.	7
b	Dada a equação linear x-y+z = 9. Aponte 2 valores para *x*, *y* e *z* que são soluções dessa equação linear e 2 valores de *x*, *y* e *z* que não são soluções dessa equação linear.	Solução: (2;2;9) (5;3;7) Não são solução: (3;-2;5) (4;5;6)	1
		Solução: (12;4;1) Não são solução: (4;2;3)	2
		Solução: (5;4;8) (3,5;2;7,5) Não são solução: (3;2;1/3) (7;21;1)	3
		Solução: (6;3;6) Não são solução: (10;5;1)	4
		Solução: (5;2;6) (7;2;4) Não são solução: (10;2;3) (11;3;5)	5
		Solução: (10;5;4) (12;6;3) Não são solução: (8;15;3) (14;7;10)	6
		Solução: *Não respondeu. Não são solução: Não respondeu.	7
		Solução: (10;1;0) (7;0;2) Não são solução: (14;3;9) (13;6;6)	8
		Solução: (5;3;7) (9;6;6) Não são solução: (5;5;6) (29;13;-12)	9
		Solução: *Não respondeu. Não são solução: *Não respondeu.	10
		Solução: *Não respondeu. Não são solução: *Não respondeu.	11
		Solução: (14;6;1) (29;25;5) Não são solução: (12;120;40) (47;12;77)	12
		Solução: (2;-1;8) (7;-2;4) – **Respostas incorretas.** Não são solução: (7;9;-2) (12;9;8)	13
		Solução: (3;3;3) (3;4;2) – **Respostas incorretas.** Não são solução: Não respondeu.	14
c	Sejam os números 2 e 10, escreva uma equação linear na qual esses dois números sejam soluções.	x+y=12	1, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 13
		x+y=2 – **Resposta incorreta.** x+y=10 – **Resposta incorreta.**	2
		m-p=2 – **Resposta incorreta.** x+y=10 – **Resposta incorreta.**	6
		*Não respondeu	7, 10, 11
		a+b – **Resposta incorreta.**	14

Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Quadro 43, vemos que das 14 equipes pesquisadas, 13 responderam de maneira correta que os valores numéricos -2 e -6 não eram soluções da EL citada, sendo que equipe 7 não respondeu a questão. Já no item b, verificamos que 9 equipes apresentaram de forma correta soluções e não soluções para a EL dada. Entretanto, nesse item observamos que as equipes 13 e 14 deram soluções de forma equivocada e ainda as equipes 7, 10 e 11 deixaram de responder

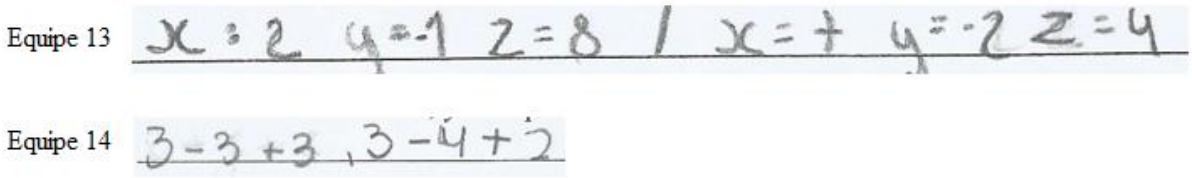
a atividade proposta. Por fim, para o item c, 8 equipes investigaram escreveram uma EL correta cujos valores numéricos 2 e 10 seriam soluções. Já as equipes 2, 6 e 10 apontaram ELs de forma incorreta sendo que as equipes 7, 10 e 11 deixaram de fazem a atividade proposta por esse item.

Em relação uma das dificuldades elencadas nessa atividade 4, o diálogo que segue mostra a aluna A3 com entraves no item a, o qual a aluna fez erroneamente a soma de -2 com -6 igual a +8:

A3: Professor vem cá, d+e=8.
P: Tá... d+e=8. Só fazer a conta, d+e=8. Eu tenho aqui que d é -6 e que o e é -2, vai ser solução?
A3: Oito.
P: Jogo de sinal a gente usa quando? Na multiplicação e na divisão. Então ai não tem né?
A3: Então não tem né.
P: Então aqui oh. Se você deve dois, você deve seis, você deve quanto?
A3: Oito.
P: Isso. Então se você deve dois, você deve seis, então você deve oito, ou seja, -8 né?
A3: Então tá errado.
P: Tá, mas você tem justificar o porquê.
A3: Então não é né?
P: Pra que seja solução, você acabou de ver na atividade 3, tem que deixar numa sentença matemática verdadeira.
A3: Então não é.

Vemos pelo diálogo que após verificar o erro na resposta da aluna, o professor retomou conteúdos previamente aprendidos com a estudante, relembrando que a operação de soma de números negativos ter sempre um resultado negativo. Com esse auxílio a estudante obteve êxito na compreensão e na resolução correta do item a. Em relação ao item b, a Figura 12 mostra as dificuldades de resolução encontradas por duas equipes ao resolverem a EL x-y+z=9 tiradas da folha de atividades das equipes que foi entregue ao professor ao final da aula:

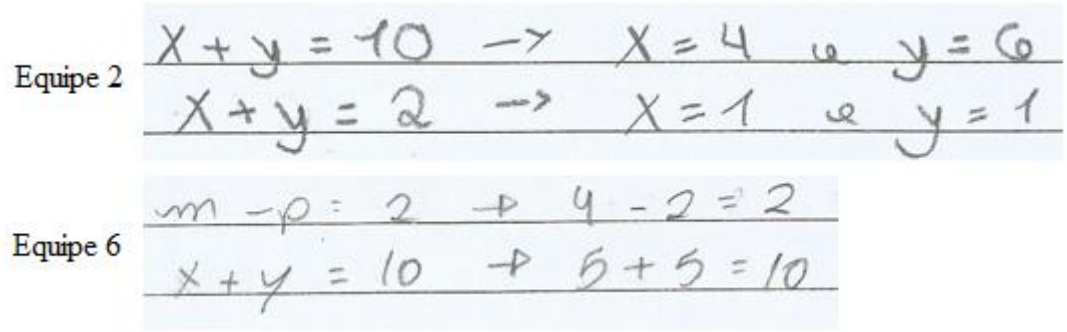
Figura 12 - Dificuldades das equipes da resolução da atividade 4 - item b.



Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 12, vemos que as duas equipes elencadas acima tiveram dificuldades procedimentais para resolverem o problema. A equipe 13 ao observar o coeficiente negativo para y negativo na EL apresentada, acabou apontando soluções de y = -1 e y=-2, cujos sinais negativos eram desnecessários. Já as alunas da equipe 14 não consideraram o sinal negativo de y na EL e simplesmente usaram como soluções números cuja soma era igual a 9. Em relação ao item c nos quais eram dados os números 2 e 10 como solução e solicitado que os estudantes escrevessem uma EL que tivessem vemos na Figura 13 as dificuldades de duas equipes na resolução desse problema:

Figura 13 - Dificuldades das equipes da resolução da atividade 4 - item c.



Fonte: Elaborada pelo autor

Observamos pela Figura 13 que as equipes 2 e 6 tiveram o mesmo entendimento errôneo em relação a questão proposta pelo item c. As duas equipes interpretaram que os números 2 e 10 eram os termos independentes da EL e não a solução, por isso escreveram suas ELs baseados nesse entendimento.

Nesse panorama, vemos que as dificuldades de cálculos matemáticos e de representação algébrica encontradas durante a análise da atividade 4 foram apontados por trabalhos como de Branco (2008) que observou entraves de alunos do 7º ano do EF para representar problemas algébricos. Teixeira (2013) também observou alunos dessa mesma faixa escolar com dificuldades de cálculo matemáticos com números inteiros e, ainda, Neves (2012) verificou estudantes da terceira série do EM com as mesmas dificuldades. Esse contexto aponta para uma necessidade de melhoria no trabalho de ensino de conteúdos de representação algébrica quanto de operações com números inteiros desde o EF até no EM.

Desse modo finalizamos a aula 5 de nossa organização de ensino, visando a formação conceitual de EL. Conforme nossa metodologia, a aula 6 segue essa etapa de *formação do conceito* a qual descrevemos sua análise na subseção seguinte.

4.2.2 Análise da aula 6 – formando o conceito de SL

Nossa aula 6 assim como ocorreu com a aula 5, devido ao desenvolvimento das atividades propostas acabou durando um tempo maior do que o planejado. Assim, esse momento se deu em duas aulas de 50 minutos que se realizaram no dia 09 de agosto de 2022. Dessa aula participaram 31 alunos divididos em 15 equipes sendo 14 duplas e um trio. De maneira a facilitar nossa análise e o entendimento do leitor, dividimos nossas análises com base nas atividades 5 a 8 (disponibilizadas no Quadro 24) apresentadas nas quatro subseções seguintes.

4.2.2.1 Analisando as atividades 5 e 6

Conforme vimos na seção de metodologia, a atividade 5 retoma os SL oriundos das situações 1 e 2 vistos na aula 1. Nela, os alunos deveriam apontar as características relativas as formas matemáticas que viam no primeiro SL que era do tipo 2 por 2 e no segundo SL, que era escalonado e possuía três equações e três incógnitas. Nesse contexto, a aula teve seu início com a leitura da atividade pelo professor e a explanação sobre como os estudantes deveriam resolvê-la. O intuito dessa atividade 5 era que os alunos percebessem o SL como um conjunto de ELs agrupados pelo símbolo de chaves. Desse ponto de vista, os alunos poderiam primeiramente identificar que as equações apresentadas eram EL, para num segundo momento identificarem que em um SL elas estavam agrupadas por uma chave. O Quadro 44 aponta sobre o desempenho dos participantes nessa atividade:

Quadro 44 - Desempenho das equipes na resolução da atividade 5.

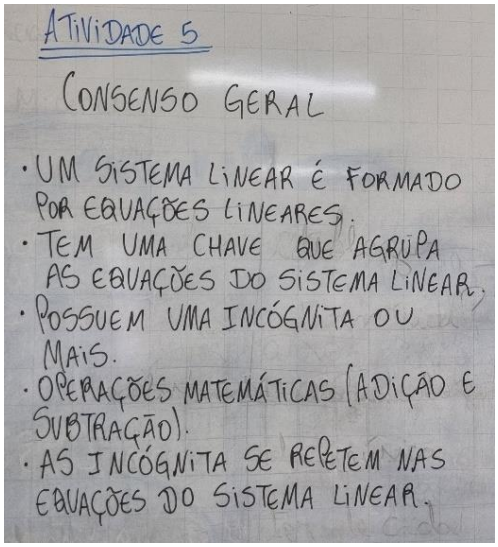
Equipes	Participantes	Características apontadas
1	A1 e A23	- Possuem incógnitas. -As incógnitas se repetem no SL. - Possui mais de uma EL. - Tem operações de adição e subtração. - Possui chaves que agrupam as EL.
2	A2 e A30	- SL são compostos EL. - Têm mais de uma EL.
3	A3 e A17	- Têm mais de uma EL. - Possui incógnitas e números reais. - Possui uma chave.
4	A4 e A21	- Tem ELs.
5	A5 e A9	- Os coeficientes são sempre números reais.
6	A6, A20 e A27	- Um SL é constituído por ELs. - A chave indica um SL.
7	A7 e A35	- Possui chaves, equações e somas.
8	A10 e A32	- Não há obrigação de usarmos sempre a mesma letra. - As variáveis têm sempre expoente 1. - Coeficientes sempre são números reais. - Tem operações de adição e subtração.
9	A15 e A26	- É formado por ELs. - Têm operações matemáticas (adição e subtração).
10	A16 e A38	- Equações lineares. - Chaves. - Mais de uma incógnita. - Operações matemáticas.
11	A18 e A40	- São formados por duas ou mais ELs que possuem as suas incógnitas relacionadas. - Contém chaves.
12	A22 e A31	- Possuem ELs. - Mais de uma incógnita. - Chaves.
13	A24 e A29	- Incógnitas. - ELs. - Operações matemáticas. - Representados por uma chave. - As incógnitas se repetem nas ELs.
14	A25 e A39	- Possuem uma ou mais incógnitas. - É composto por ELs.
15	A28 e A36	- Chaves. - Somas. - Equações.

Fonte: Elaborado pelo autor

Com a ajuda do Quadro 44, ao nos debruçarmos sobre as respostas dos alunos na atividade 5 podemos verificar que das 15 equipes participantes, 10 equipes (equipes 1, 2, 3, 4 e 6, 9, 11, 12, 13 e 14) apontaram que os SL eram formados por EL e 9 equipes (equipes 1, 3, 6, 7, 10, 11, 12, 13 e 15) verificaram que as EL do SL eram agrupadas por chaves. Todas as equipes indicaram diferentes características de uma EL presentes nas equações do SL, num pensamento matemático que nos incutiu a ideia de uma compreensão ainda incompleta sobre o

conceito que pretendíamos pra SL. Desse modo, buscando alcançar a completude desse conceito, ao final da atividade, juntamos as ideias dos participantes da pesquisa por meio de um consenso da turma na lousa, anotando os principais pontos pensados da forma matemática de um SL. A Figura 14 abaixo elucida como ficaram as anotações do professor na lousa após esse momento da aula:

Figura 14 - Consenso na lousa relativa à atividade 5.



Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 14, observamos que com as anotações da lousa buscando o consenso com as equipes participantes foi possível chegar a uma síntese das principais ideias elencadas por meio da atividade 5 que apontavam as características inerentes a forma matemática de um SL. Segundo as ideias de Klausmeier e Goodwin (1977) e de Pozo (1998) foi possível por meio desse momento da aula que os estudantes pudessem apontar características e escreverem como compreenderam o conceito de SL estudado.

Em relação ao andamento da aula durante a resolução da atividade proposta, após passado algum tempo da aula e verificando as dificuldades de muitas equipes, o docente tentou fazer os alunos pensarem no fato do porquê da palavra *linear* ser comum tanto a SL como a EL. O diálogo abaixo entre o professor e a aluna A24 traz à tona como se deu essa abordagem:

> *P: E ai, o que vocês observaram de características?*
> *A24: Ela possui incógnitas. Ela tem resultados que são valores reais. E ela geralmente é operação só de soma e de subtração.*
> *P: Aham. Olha só, vocês observaram... É que na aula passada a gente falou sobre as características da equação linear. Por que você acha que se chama sistema linear?*

A24: Porque tem um passo a passo da conta.
P: Passo a passo da conta?
A24: É... Pra resolver.
P: Olha só. Pensa no nome, você viu equação linear e agora você tem sistema linear. Tem equações ali não tem?
A24: Tem.
P: Que tipo de equações são essas? O que que você acha? Pensa um pouquinho ai.

Verificamos pelas falas transcritas acima que o professor busca levar o aluno A24 ao entendimento de que as características apontadas por ele nas equações do SL eram análogas a de uma EL. Para tanto, o investigador pede para o aluno pensar nos nomes EL e SL, não dando a resposta e deixando um momento para o aluno refletir. Um pouco mais adiante, o pesquisador discute com as alunas A2 e A30 num diálogo que leva as estudantes a compreenderem que as ELs é que formam um SL:

A2: Professor. Aqui, "responda quais características que você observa na forma matemática de um sistema linear" [lendo parte do enunciado da atividade]. Não é sobre as características que a gente encontrava nas equações lineares e que tem nesse daqui?
P: Você acha que tem? Ele tem essas características? Aqui a gente tem o que, sentença matemáticas ou equações?
A2: Equações.
P: Equações. E na aula passada a gente viu o que são equações lineares. Você acha que essas equações aí, elas são lineares? Você acha que todas elas são lineares?
A2: Acho que sim.
A30: Sim.
P: Hein... Vocês acham que todas essas equações são lineares?
A30: Sim.
P: Eu tava falando ali pras outras equipes que aula passada a gente viu equação linear e agora a gente tá vendo sistema linear.
A2: Mas isso não é uma equação?
P: Também, só que agora a gente tem um sistema linear. Sistema linear é formado pelo que então?
A30: Equações.
P: Por equações de que tipo?
A2: Lineares.

Desse modo, com a atividade 5 percebemos o entendimento e a compreensão dos alunos ao visualizarem a forma matemática de um SL. Dando continuidade a essa ideia, atividade 6 buscou ampliar a formação do conceito dos alunos relativas a SL por meio de exemplos. Assim, no item a solicitava-se que as equipes apontassem um exemplo de SL com duas equações e

duas incógnitas e no item b um exemplo de um SL de três equações e três incógnitas. O Quadro 45 mostra o desempenho dos participantes na realização dessa atividade:

Quadro 45 - Desempenho das equipes na resolução da atividade 6.

Equipes	Participantes	Item a – Dê um exemplo de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas.	RF	Item b – Dê um exemplo de um sistema linear com três equações e três incógnitas.	RF
1	A1 e A23	$\begin{cases} 2b + 4c = 26 \\ 3c = 12 \end{cases}$	✓	$\begin{cases} 2a + b + c = 7 \\ a + 2c = 7 \\ 3c = 9 \end{cases}$	✓
2	A2 e A30	$\begin{cases} b + t = 14 \\ 3 + 2t = 33 \end{cases}$	✓	$\begin{cases} 2b + t + R = 20 \\ 2t + 3R = 21 \\ 4b + 2R = 22 \end{cases}$	✓
3	A3 e A17	$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 4y = 26 \end{cases}$	✓	$\begin{cases} x + y + z = 21 \\ 2y + 4z = 60 \\ 3z = 80 \end{cases}$	✓
4	A4 e A21	$\begin{cases} a + b = 22 \\ 4a + 6b = 110 \end{cases}$	✓	$\begin{cases} b + 4a + c = 10 \\ 4a + 4b = 12 \\ 3c = 11{,}50 \end{cases}$	✓
5	A5 e A9	$\begin{cases} a + g = 8 \\ 2a + 4g = 27{,}50 \end{cases}$	P	$\begin{cases} a + 2x + y = 9 \\ 2x + 2y = 11 \\ 3y = 10{,}50 \end{cases}$	✓
6	A6, A20 e A27	$\begin{cases} x + y = 18 \\ 6x - 3y = 36 \end{cases}$	✓	$\begin{cases} 2L + m - n = 7 \\ L + 2m = 10 \\ 3n = 21 \end{cases}$	✓
7	A7 e A35	$\begin{cases} C + X = 10 \\ 3C + 2 = 25{,}00 \end{cases}$	P	$\begin{cases} A + 2b + C = 10 \\ 2b + 2C = 12 \\ 3 = 11{,}50 \end{cases}$	✓
8	A10 e A32	$\begin{cases} V + T = 6 \\ 2V + 4T = 20 \end{cases}$	✓	$\begin{cases} V + 2T + A = 13 \\ 2T + 2C = 14 \\ 3C = 9 \end{cases}$	✓
9	A15 e A26	$\begin{cases} C + Z + A = 10 \\ 3C + 5Z + 2A = 63 \end{cases}$	x	$\begin{cases} Z + 15 + V = 7 \\ 5 + V3 = 12 \\ V3 = 15{,}02 \end{cases}$	✓
10	A16 e A38	$\begin{cases} K + N = 6 \\ 3K + 2N = 24{,}50 \end{cases}$	✓	$\begin{cases} b + 4a + c = 10 \\ 4a + 4b = 12 \\ 3c = 11{,}50 \end{cases}$	✓
11	A18 e A40	$\begin{cases} G + A = 32 \\ 3G + 7A = 96 \end{cases}$	✓	$\begin{cases} G - M + A = 16 \\ 2G + 2A = 13 \\ 4G - 2A = 20 \end{cases}$	✓
12	A22 e A31	$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$	✓	$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 6a - 6 - 4c = 1 \\ -4 + 6b - c = 0 \end{cases}$	✓

13	A24 e A29	$\begin{cases} s + n = 21,00 \\ 4s + 7n = 121,65 \end{cases}$	☑	$\begin{cases} f + 3m - 2z = 2,54 \\ 2m + z = 26,56 \\ 5z = 61,00 \end{cases}$	☑
14	A25 e A39	$\begin{cases} c + d = 5 \\ 2c + 3d = 13 \end{cases}$	☑	$\begin{cases} L + 3P + T = 15 \\ 4P + T = 14 \\ 3T = 30 \end{cases}$	☑
15	A28 e A36	$c + y = 10$ $3c + 2 = 25,00$	P	$A + 2B + C = 10$ $2B + 2C = 12$ $3 = 11,50$	P

Legenda: RF: Resposta final; ☑: Correta; P: Parcialmente correta; x: Incorreta.
Fonte: Elaborado pelo autor

Por meio do Quadro 45, vemos que 12 equipes resolveram o item a de maneira correta, porém 3 equipes apresentaram dificuldades em sua realização. Já para o item b, 13 equipes realizaram a atividade de forma correta e 2 equipes tiveram entraves.

Nesse sentido, constatamos acima que tanto no item a quanto no item b, equipe 5 usou a notação do SL com as equações entre parênteses. Ainda no item a), a equipe 9 deu uma resposta incorreta ao escrever um SL com 2 equações, porém com 3 incógnitas. Por fim, a dupla de alunas da equipe 15 escreveram corretamente as EL dos dois SL solicitados, porém abstiveram-se de colocar a chaves agrupando as equações do SL tanto no item a quanto no item b. Desse modo, no quadro acima consideramos parcialmente corretas as respostas que cujo SL está correto, mas a notação com chaves era equivocada.

Dentre todas as dificuldades inerentes a escrita algébrica, as quais puderam posteriormente ser sanadas pelo professor, temos que Costa (2010) também encontrou tais dificuldades com estudantes do oitavo ano do EF ao escreveram equações de primeiro grau. Já Nobre, Amado e Ponte (2012) também encontraram esses mesmos obstáculos ao trabalharem o método da substituição na resolução de SL com alunos do 9º ano do ensino básico de Portugal. Sobre esses entraves, os autores das duas pesquisas apontam a necessidade de valorizar o processo de ensino e aprendizagem da escrita algébrica durante as aulas de Matemática.

Após apontar as análises que envolveram características e exemplos de SL oriundas das atividades 5 e 6, a próxima subseção busca analisar a atividade 7 que buscou ampliar a formação conceitual da solução de uma EL para a solução de uma SL.

4.2.2.2 Analisando a atividade 7

Essa atividade buscou trazer o conceito de solução de uma EL vistos na aula 5 de modo que os estudantes compreendessem a ampliação desse conceito para a solução de um SL, cujos valores numéricos são soluções de todas as suas ELs. Nesse sentido, o item a da atividade 7 solicitava que os participantes escrevessem essa ideia. Já o item b da mesma atividade, apresentava um SL, pedia que os estudantes escrevessem sua solução e dissertassem sobre o significado dessa solução encontrada. O Quadro 46 apresenta o desempenho das equipes ao realizarem a atividade 7 de nossa organização de ensino:

Quadro 46 – Desempenho das equipes na atividade 7.

Item	Enunciado	Respostas das equipes	Equipes
a	Na aula anterior você compreendeu o conceito de solução de uma equação linear, agora como você explicaria o que é a solução de um sistema linear?	*- A solução torna todas as equações verdadeiras.*	1, 3, 6 e 11
		- É deixar verdadeira todas as equações.	2, 4, 12 e 14
		- A solução de um SL é a solução de todas as equações desse sistema.	5 e 13
		- Torna uma sentença verdadeira.	7 e 15
		- Você descobrir as incógnitas.	8
		- A solução é deixar todas as sentenças verdadeiras.	9 e 10
b	Com base na sua resposta do item anterior, encontre a solução do sistema linear abaixo e explique com suas palavras o significado a solução que você encontrou. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$	Solução: *x=3 e y=2* Explicação: *Ao estipular valores para as incógnitas é possível resolver, logo a equação torna-se verdadeira.*	1
		Solução*: x=3 e y=2* Explicação: *Deixou verdadeira todas as equações.*	2, 13 e 14
		Solução: *x=3 e y=2* Explicação: *A solução torna todas as equações verdadeiras e as incógnitas precisam ter o mesmo valor nas equações diferentes.*	3
		Solução: *x=3 e y=2* Explicação: *Esses valores resolvem todas as equações.*	4 e 10
		Solução: *x=3 e y=2* Explicação: *Não explicou.	5, 7, 12 e 15
		Solução: *x=3 e y=2* Explicação: *A substituição dessas incógnitas solucionou as duas equações.*	6
		Solução: *x=3 e y=2* Explicação: *Por lógica, 3+2=5 e 3-2=1.*	8
		Solução: *Não apresentou. Explicação: *O significado é deixar a incógnita verdadeira.*	9
		Solução: *x=3 e y=2* Explicação: *Com base no resultado, 3x e 2y* bate com o resultado.	11

Fonte: Elaborado pelo autor

Ao analisarmos o Quadro 46, observamos no item a que as equipes, com suas próprias palavras, deram respostas semelhantes sobre o entendimento e compreensão da solução de um SL. Tais respostas giravam em torno do fato de que a solução de um SL torna em sentenças

matemáticas verdadeiras todas as ELs do sistema. Desse modo, seguindo as ideias de Pozo (1998), ao nosso ver as equipes pesquisadas foram capazes de elaborar uma definição do significado do conceito de solução de SL que foi abordado no item a. O passo seguinte, segundo preconiza o mesmo autor, era levar os alunos a reconhecerem a definição do conceito em meio a algumas possibilidades e foi isso que aconteceu no item b.

No item b, os alunos deveriam encontrar a solução de um SL do tipo 2 por 2 e, em seguida, descreverem o significado da solução que encontraram. Das 15 equipes participantes, 14 equipes encontraram a solução correta do SL dado (x=3 e y=2) e, dentre esses, quatro não responderam sobre o significado da solução encontrada (equipes 5, 7, 12 e 15). Ainda verificamos duas equipes que apresentaram dificuldades para expressarem sua compreensão do conceito estudado. Nesse sentido, a equipe 9 apontou que o "O significado da solução é considerado incógnita verdadeira" e equipe 11 indicou que a solução foi encontrada afirmando que "Com base no resultado, 3x e 2y bate com o resultado".

Sobre as respostas das duas equipes supracitadas, vemos que a equipe 11 embora tenha encontrado a a resposta correta para x = 3 e y = 2 não conseguiu expressar esse raciocínio de maneira correta e anotaram como "*3x e 2y*" e a expressão *"bate com o resultado"* nos leva a entender que referenciasse a tornar as EL do SL em sentenças matemáticas verdadeiras. Do mesmo modo, equipe 9 também teve dificuldades para expressar seus pensamentos de maneira correta em relação ao conceito abordado. Negromonte *et al.* (2019) já apontavam sobre a necessidade de desenvolvimento algébrico para que os estudantes possam se expressar melhor algebricamente quando se deparem com atividades inerentes a álgebra.

Nesse panorama, Tedesco e Giareta (2009) também encontraram estudantes do 2º ano do EM com dificuldades em habilidades de se expressar algebricamente quando se deparam com questões básicas de conhecimentos envolvendo a álgebra. Reforçando esse quadro preocupante, Pereira (2017) também encontrou alunos de 9º ano de EF com entraves inerentes ao entendimento e compreensão de conceitos algébricos. Nesse sentido, o autor infere sobre a importância de desenvolver o raciocínio lógico e algébrico de modo que os estudantes possam pensar e se expressar algebricamente de maneira adequada.

Nesse sentido, o diálogo a seguir entre o professor pesquisador e a aluna A6, mostra como o docente partindo da resposta da aluna ao item a, a leva a refletir e chegar a resposta esperada da justificativa do item b:

P: Tá. A b aqui você só colocou o resultado?

A6: Sim.
P: Qual o significado desse resultado? Você respondeu... É... Você respondeu o valor numérico. Mas na letra a, você falou o significado, né. O que você respondeu na letra a ali?
A6: Que a solução deixa os números operados que chegam ao resultado. E que a solução torna a equação verdadeira.
P: Né. Só uma equação? Quando é sistema linear, ele tem que deixar só uma equação do sistema verdadeira ou todas? O que que você acha?
A6: Como assim?
P: O que que você acha? Você resolveu o sistema linear, você achou o valor de x e y...
A6: Aham.
P: Ele tem que deixar só uma equação verdadeira?
A6: Todas.
P: Tem que deixar todas né?
A6: Mas esse daqui tá errado então?
P: Não. Tá certo os valores que você encontrou ali.
A6: Mas...
P: Quanto que vale o x? Você não respondeu ali.
A6: Ah... É só marcar aqui.
P: Tá, o x é três?
A6: É três.
P: E o y é dois.
A6: É dois.
P: Correto?
A6: Sim.
P: Olha só... Qual que é o significado disso? O x valendo três e o y valendo dois ele resolve, resolve o que? A primeira equação?
A6: As duas.
P: As duas. Esse é o significado! A solução do sistema tem que resolver as duas equações do sistema, entendeu? Se você achar que o x vale três e o igual vale dois, tem que resolver a primeira equação e a segunda. Porque é um sistema, eles estão juntos. Então ele tem que ser solução da primeira equação, tem que ter solução da segunda equação. Tá?
A6: Tá bom professor.

Em um olhar mais global para resolução da atividade 7, verificamos que a grande maioria dos participantes compreendeu ao final de sua resolução a ideia conceitual da solução de um SL tendo em vista que as respostas as indagações da atividade estiveram em sua maioria em acordo ao que esperávamos sob o ponto de vista dos conceitos abordados.

Buscando finalizar a etapa 2 de *formação do conceito* de nossa organização de ensino, a atividade 8 é que analisamos na próxima subseção.

4.3.2.4 Analisando a atividade 8

Encerrando a etapa na qual objetivamos formar o conceito de SL, a atividade 8 solicitava aos alunos que escrevessem no papel com suas palavras, as suas compreensões relativas os conceitos abordados nas aulas 5 e 6. Dessa maneira, solicitamos no item a, sobre o que eram EL; no item b sobre a solução de uma EL; no item c, sobre o que é um SL; e, por fim, no item d, sobre o que é a solução de um SL. Para essas questões, foi solicitado aos alunos que não consultassem nenhum tipo de material e que escrevessem a compreensão que tinham sobre os conceitos perguntados. A Tabela 4 mostra como se deram os apontamentos dos estudantes ao responderem as indagações da atividade 8:

Tabela 4 – Respostas das equipes na atividade 8.

Atividade	Apontamentos das equipes	Número de equipes	%
a) EL	São equações do 1º grau	13	86,7%
	Contém operações de adição e subtração	5	33,3%
	Variável fica no numerador de uma fração	5	33,3%
	Não pode existir multiplicação entre as incógnitas	4	26,7%
	Podemos usar diferentes letras para as incógnitas	3	20%
	Coeficientes são números reais	2	13,3%
b) Solução da EL	Torna a equação verdadeira	15	100%
	Substituição de números por incógnitas que tornam o resultado verdadeiro	3	20%
c) SL	É um conjunto de EL	14	93,3%
	Agrupados por uma chave	3	20%
d) Solução do SL	Torna todas as EL do SL verdadeiras	13	86,7%

Fonte: Elaborada pelo autor

Dentre as respostas dos alunos para os itens *a* e *c*, vemos que maioria dos estudantes compreendeu os conceitos formados e apontaram características desses conceitos como em consonância com o que vimos anteriormente na Tabela 5 sobre EL e na Figura 11 sobre SL. Para os itens *a* e *c*, as respostas mais citadas foram que as EL "são equações do 1º grau" (86,7%) e para SL foi "é um conjunto de EL" (93,3%). Já os itens *b* e *d* referentes a solução de EL e SL também foram respondidos corretamente pela maioria das equipes. Para o item *b* verificamos que os alunos tendem a responder que a solução da EL "torna a equação verdadeira" ao invés de "torna a equação em uma sentença matemática verdadeira". Temos ainda, que esse pensamento é estendido ao item *d* quando os investigados apontam que a solução do SL "torna todas as EL do SL verdadeira". Ao nosso ver, essa frase escrita dessa maneira, não prejudica o entendimento dos alunos relativas a esse conceito de solução, seja de EL ou de SL.

Ao encerrar essa última atividade, observamos que nossa organização de ensino conseguiu alcançar o intuito da etapa 2 de *formação do conceito* apontada por Proença (2021, p. 09), pois os alunos foram capazes de "apresentarem uma definição para o conceito (construto

mental), o que evidenciará as características do conceito que eles mencionam". Nesse contexto, Gonçalves e Proença (2020) pesquisando sobre conhecimentos conceituais do conteúdo de equações de 2º grau, com alunos do 1º ano do EM verificaram estudantes com tais conhecimentos em fase de desenvolvimento. Já Oktaç (2018) ao investigar alunos de EF e EM e Dewi *et al.* (2021) ao pesquisarem licenciandos de Matemática verificaram indivíduos com dificuldades para identificar conceitos de SL e para estabelecer relações entre algoritmos devido ao conhecimento conceitual imaturo. Estevão (2021) em sua pesquisa bibliográfica também observou pesquisas que apontavam estudantes com dificuldades relacionadas a compreensão e significação de situações e conceitos. Nesse sentido, acreditamos que nossa organização de ensino por meio da etapa de *formação do conceito* permitiu amenizar entraves nesse sentido concernentes ao trabalho de SL por meio da RP em sala de aula.

Findamos assim, a etapa 2 de nossa organização de ensino e chegamos a etapa de *definição do conteúdo* cuja análise descreveremos na próxima subseção.

4.3 Eixo 3 – análise da compreensão e desempenho dos alunos no processo de ensino de definição do conteúdo de SL

Nesse eixo faremos a análise da etapa 3 de nossa organização de ensino envolvendo a *definição de conteúdo* de SL. Dessa etapa, fizeram parte as aulas 7 a 14 englobando as atividades 9 a 20 propostas para nossa investigação. Do mesmo modo que fizemos nos eixos anteriores, separamos essa análise por aula e por atividades de forma a trazer maior clareza e entendimento dos objetivos propostos das análises.

4.3.1 Análise das aulas 7 e 8 – definindo EL, SL e suas soluções

Essas duas aulas de nossa organização de ensino ocorreram em duas aulas de 50 minutos no dia 11 de agosto de 2022. Participaram desse momento um total de 31 alunos divididos da seguinte maneira: dois trios, doze duplas e um aluno participou de maneira individual. Na primeira aula do dia, foram desenvolvidas as atividades 9 a 12 da aula 7 (Quadros 25 e 26). E, na segunda aula geminada, desenvolveram-se as atividades 13 a 15 da aula 8. As próximas subseções trazem a luz a análise das atividades desenvolvidas tendo em vista os objetivos concernentes ao eixo de análise 3.

4.3.1.1 Análise da atividade 9

O professor iniciou a aula relembrando com os estudantes o conceito de EL visto na aula 5. Esse momento buscou desenvolver a abordagem de ensino para a etapa 3 conforme Proença (2021, p. 09) propõe ao afirmar que "é importante o professor estabelecer a relação entre a linguagem matemática envolvida e a linguagem que foi utilizada pelos alunos quando das atividades de formação conceitual (etapa 2)". Os diálogos a seguir ilustram como se deu o momento inicial dessa aula:

> *P: Vamos lá então. Pessoal, vocês viram na aula passada, o que que era uma equação linear? [Alguns segundos de silêncio] Né... O que que era uma equação linear, quem lembra? Foi perguntado aí, até na atividade ai, na última atividade que vocês fizeram. O que era uma equação linear?*
> *A3: Do primeiro grau.*
> *P: Do primeiro grau né. O que mais? Ham.*
> *A17: Compostas por números reais.*
> *P: Compostas por números reais.*
> *A29: Operações de adição e subtração.*
> *P: Hein. Operação de adição e subtração. E o que mais? Vocês têm ai pessoal, vocês responderam.*
> *A39: Também precisa ser verdadeira né professor?*
> *P: Isso já seria a solução né.*
> *A17: Contém incógnitas.*
> *P: Contém incógnitas né. Então agora a gente vai começar pessoal, vendo a definição.*

Pelas falas transcritas acima, vemos os alunos A3, A17 e A29 apontarem de maneira correta ao pesquisador as características compreendidas de uma EL nas aulas anteriores e ainda vemos o aluno A39 lembrar da característica da solução de uma EL. Ato contínuo, o professor leu a definição matemática de uma EL e discutiu com os alunos os entes matemáticos importantes, como variáveis, coeficientes e termos independentes.

A atividade 9 (disponível no Quadro 25) trazia em cada item uma EL e o comando era para que o aluno apontasse os coeficientes e o termo independente inerentes a EL dada. Para melhor compreensão, o docente resolveu e explicou na lousa os itens *a*, *b* e *c* visando maior êxito na assimilação da definição explanada. Em seguida, foi solicitado que as equipes fizessem os itens *d* e *e* de modo a compreenderem melhor o conteúdo matemático trabalhado.

Em relação à resolução dos itens, ao analisarmos os áudios transcritos desse momento da aula apontaram algumas equipes com dificuldades para reconhecerem corretamente os coeficientes das incógnitas presentes nas EL propostas. O diálogo a seguir mostra o professor

auxiliando as alunas A3 e A17 a responderem corretamente o coeficiente do termo $\frac{w}{5}$ na resolução do item *d:*

A3: Professor, aqui eu posso deixar o 5 aqui ou tem que passar para o outro lado?
P: Não.
A3: Pode deixar então?
P: Quando tá fração assim, qual que é o número que tá na frente do w? Você tem ai, w sobre 5 né. Qual o número que tá na frente do w?
A17: É o um né?
P: Então vai ficar o que?
A17: Uma fração.
P: Uma fração né. O numerador vale quanto?
A3: Ah... Então aqui vai ficar uma fração com o 1 que está na frente do w.
P: Isso. Na frente do w que número que é?
A3: Um.
P: Em baixo é o...?
A3: Cinco.

Pelo diálogo percebemos que as alunas A3 e A17 não se atentaram para o fato de que quando a variável não tem um valor numérico aparecendo, isso indica que seu coeficiente é um. Com o auxílio do docente, equipe percebeu que o termo $\frac{w}{5}$ tem coeficiente $\frac{1}{5}$ e não apenas 5 como pensavam anteriormente. Dentro desses mesmos entraves em relação a coeficientes e termos independentes, o Quadro 47 esclarece como se deram tais dificuldades das 15 equipes na resolução dos itens *d* e *e* da atividade 9:

Quadro 47 - Dificuldades das equipes na atividade 9-d e 9-f.

Equipes	**Participantes**	**Dificuldades no item** d) $\frac{w}{5} - y = 6$	**Dificuldades no item** e) $1{,}8x + \pi y = z + 3$
1	A1 e A23	-	- Colocou 1 como coeficiente do termo πy.
2	A2 e A30	-	-
3	A3, A17 e A26	-	-
4	A4 e A21	- Colocou 5 como coeficiente de $\frac{w}{5}$.	- Não mudou a incógnita *z* para o 1º membro da EL e colocou 1 como coeficiente de -*z*. - Colocou 1 como coeficiente do termo πy. - Não colocou o coeficiente de -*z*.
5	A5 e A9	-	- Não colocou o coeficiente de -*z*.
6	A6, A20 e A27	- Não colocou 6 como coeficiente.	- Colocou 1 e 3 como termos independentes.
7	A7 e A35	- Colocou 1 como coeficiente do termo -y. - Não colocou 6 como coeficiente.	- Não mudou a incógnita *z* para o 1º membro da EL e colocou 1 como coeficiente de -*z*.
8	A10 e A32	-	-

9	A13 e A19	-	-
10	A16 e A38	- Não colocou coeficiente para o termo -y. - Colocou 5 como coeficiente de $\frac{w}{5}$.	- Não colocou coeficiente para o termo πy.
11	A18 e A40	- Não colocou coeficiente para o termo -y. - Colocou 5 como coeficiente de $\frac{w}{5}$.	- Não mudou a incógnita *z* para o 1º membro da EL e colocou 1 como coeficiente de -*z*. - Colocou 1 como coeficiente do termo πy.
12	A24 e A29	-	- Colocou 1 como coeficiente do termo πy.
13	A25 e A39	- Colocou 1 como coeficiente do termo -y.	-
14	A28 e A36	- Não colocou 6 como coeficiente.	- Não mudou a incógnita *z* para o 1º membro da EL e colocou 1 como coeficiente de -*z*.
15	A31	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor

Em um olhar para o Quadro 47, vemos que no item d, 2 equipes (equipes 10 e 11) não colocaram corretamente o coeficiente -1 para o termo -y. Observamos que três equipes (equipes 4, 10 e 11) colocaram erroneamente 5 para o coeficiente do termo $\frac{w}{5}$. E ainda tivemos três equipes (equipes 6, 7 e 14) que não colocaram o número 6 como coeficiente do termo independente.

Do mesmo modo, tais dificuldades continuaram perfazendo no item e, no qual quatro equipes (equipes 4, 7, 11 e 14) não mudaram a variável *z* para o 1º membro da equação e colocaram que seu coeficiente era 1. Outras quatro equipes (equipes 1, 4, 11 e 12) colocaram equivocadamente o coeficiente 1 para o termo πy, o que nos leva a acreditar que compreenderam o π como uma variável e não como um número irracional. Para o mesmo item, equipe 10 não colocou coeficiente para πy. Do mesmo modo, duas duplas (equipes 4 e 5) que não colocaram coeficientes para o termo -*z*. E, por fim, o trio de alunas A6, A20 e A27 (equipe 6) considerou os números 1 e 3 que estavam no 2º membro como termos independentes da EL apresentada.

Em uma visão geral sobre o desempenho das 15 equipes na realização da atividade 9, observamos que a maioria compreendeu de a definição do conteúdo envolvendo a definição matemática formal de uma EL, tendo em vista que nove equipes responderam os itens *d* e *e* corretamente. Entretanto, as equipes supracitadas no Quadro 49 apresentaram dificuldades na resolução da atividade proposta causadas ao nosso modo de ver por uma não apropriação de conteúdos matemáticos de álgebra que são trabalhados a partir do 7º ano do EF, como é o caso dos coeficientes de um termo algébrico. Gonçalves e Proença (2020) também observaram tais

dificuldades com alunos do 1º ano do EM ao investigarem sobre conhecimentos conceituais e procedimentais de equações de 2º grau.

4.3.1.2 Análise da atividade 10

Antes de iniciar a atividade 10 (disponível no Quadro 26), o professor pesquisador retomou com os alunos a ideia conceitual da solução de uma EL vista na etapa 2 de *formação do conceito*. Em seguida, leu na folha de atividades sobre a definição formal da solução de uma EL. Nesse momento, o professor enfatizou nas falas que a solução de uma EL torna a equação em uma sentença matemática verdadeira e não em uma "equação verdadeira" como muitas equipes responderam nas atividades da etapa 2.

Com a definição, o pesquisador resolveu e explanou na lousa a atividade 10-*a* que trazia consigo a EL $3x-y=0$, a qual o item a que solicitava que se verificasse se a dupla ordenada (1,3) dada era solução da EL apresentada. Buscando que os alunos compreendessem a definição do conteúdo apresentado, foi pedido as equipes que resolvessem os itens *b* e *c*. O Quadro 48 traz a tona o desempenho das equipes na resolução desses dois itens:

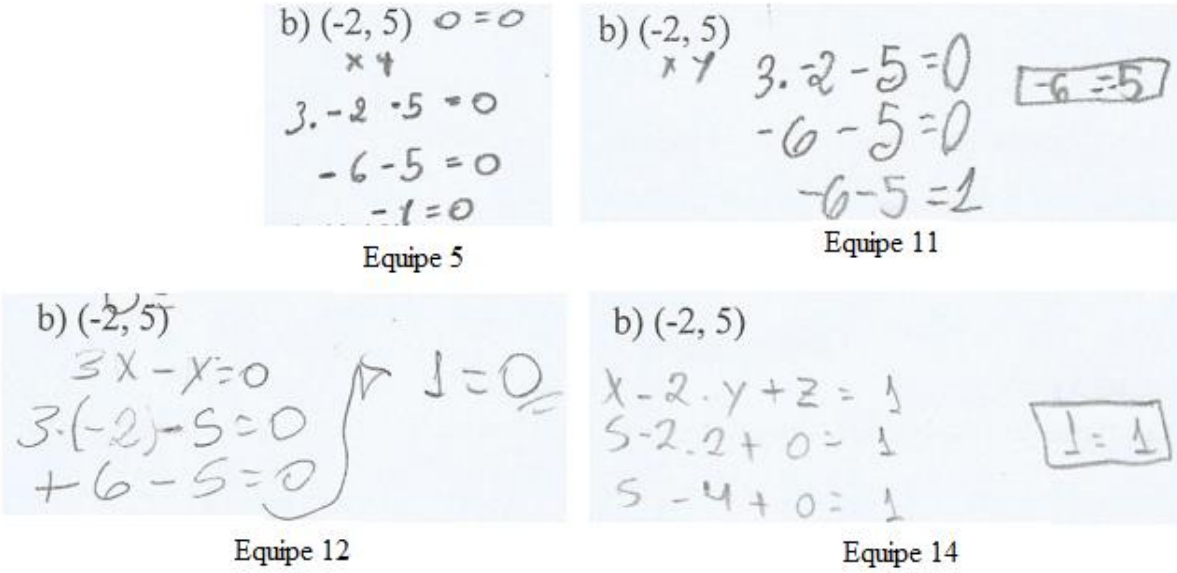
Quadro 48 - Desempenho das equipes na resolução da atividade 10.

Equipes	Participantes	Item b: (-2;5) Sentença matemática encontrada e resposta se é ou não solução	RF	Item c: (4;12) Sentença matemática encontrada e resposta de se é ou não solução	RF
1	A1 e A23	-11 = 0. *	P**	0=0. É solução.	☑
2	A2 e A30	-11 = 0. Não é solução.	☑	0=0. É solução.	☑
3	A3, A17 e A26	-11 = 0. Não é solução.	☑	0=0. É solução.	☑
4	A4 e A21	-11 = 0. *	P	0=0. É solução.	☑
5	A5 e A9	-1 = 0. Não é solução.	x	0=0. É solução.	☑
6	A6, A20 e A27	-11 = 0. Não é solução.	☑	0=0. É solução.	☑
7	A7 e A35	0 = -11 É solução.	☑	0=0. É solução.	☑
8	A10 e A32	-11 = 0. Não é solução.	☑	0=0. É solução.	☑
9	A13 e A19	-11 = 0. Não é solução.	☑	0=0. É solução.	☑
10	A16 e A38	-11 = 0. *	P	0=0. É solução.	☑
11	A18 e A40	-6 = -5. Não é solução.	x	0=0. É solução.	☑
12	A24 e A29	1 = 0. Não é solução.	x	-4 = 0. Não é solução.	x
13	A25 e A39	-11 = 0. Não é solução.	☑	0=0. É solução.	☑
14	A28 e A36	1 = 1 É solução.	x	0=0. É solução.	☑
15	A31	0 = -11 É solução.	☑	0=0. É solução.	☑

Legenda:
RF: Resposta final; ☑: Correta; P: Parcialmente correta; x: Incorreta.
*: A equipe não respondeu se o par ordenado é solução da EL.
**: Consideramos a resolução parcialmente correta as equipes que fizeram o cálculo de verificação correto, mas que porventura não responderam se o par ordenado era solução da EL.
Fonte: Elaborado pelo autor

Sobre o mesmo item b, verificamos que as equipes 7 e 15 tiveram dificuldades ao responderem a indagação da atividade, haja vista que encontraram corretamente a sentença matemática falsa 11=0 e afirmaram que o par ordenado era solução da EL. Já as equipes 1, 4 e 10 também demonstraram obstáculos no momento final de resolução da atividade tendo em vista que fizeram o cálculo correto encontrando a sentença matemática 0=-11, entretanto não finalizaram a atividade afirmando se a dupla ordenada é ou não solução da EL. A Figura 15 mostra as dificuldades de 4 equipes na resolução do item *b* relativas a **conhecimentos procedimentais***:*

Figura 15 - Dificuldades da etapa de execução na resolução da atividade 10-b.



Fonte: Elaborada pelo autor

Observamos na Figura 15 que equipe 5 além de não usar os parênteses na multiplicação 3.(-2) erraram o cálculo da adição -6-5 colocando -1 ao invés de -11. Os alunos da equipe 11, além de não fazerem o mesmo uso dos parênteses na multiplicação também erraram o cálculo -6-5 encontrando o número 1 como resposta e expressaram a resposta com -6=-5. A equipe 12 teve um erro procedimental ao calcular a multiplicação 3.(-2) = +6. Por fim, as alunas da equipe 14 usaram a EL da atividade 11, não se atentando para esse obstáculo.

Finalizando a atividade 10, na resolução do item c, 14 equipes fizeram corretamente tal atividade. Porém, equipe 12 apresentou entraves em seus **conhecimentos procedimentais** para esse item ao fazerem a multiplicação 3.4=8 e encontrando erroneamente a sentença -4=0.

Dificuldades análogas com cálculos matemáticos foram verificadas por Holanda, Freitas e Rodrigues (2020) ao investigarem questões das 4 operações matemáticas básicas com alunos do 2º ano EM. Sobre esse fato, os autores apontam a necessidade de pesquisas que apontem a causa de tais dificuldades. Silva e Silva (2013) ao pesquisarem operações com números racionais com alunos do 3º ano do EM também apontaram entraves dos estudantes pesquisados em cálculos aritméticos. Do mesmo modo, os autores apontaram para a necessidade de pesquisa, políticas e ações educacionais que intervenham nesse cenário.

Assim, finalizamos a análise dessa atividade 10 e apresentamos a atividade 11 na subseção que segue.

4.3.1.3 Análise da atividade 11

Nessa atividade (disponível no Quadro 26) que é uma ampliação da definição do conteúdo abordado, apresentou-se triplas ordenadas e solicitou-se para que os alunos verificassem se essas eram soluções da EL $x - 2y + z = 1$ com três incógnitas dada. O pesquisador explanou sobre a resolução do item *a* e pediu para que as equipes fizessem o item b. O Quadro 49 mostra o desempenho das equipes na resolução dessa atividade:

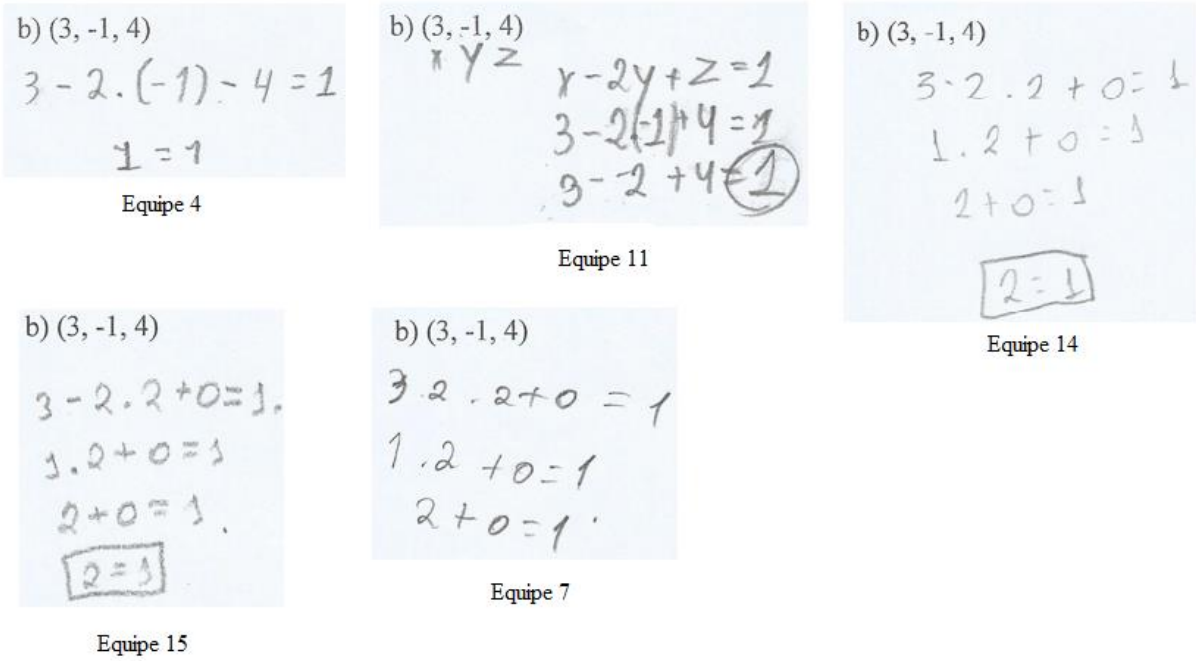
Quadro 49 - Desempenho das equipes na resolução da atividade 11.

Equipes	Participantes	Item b: (3;-1;4) Sentença matemática encontrada e resposta se é ou não solução	RF
1	A1 e A23	$9 \neq 1$ 9 = 1. *	P**
2	A2 e A30	9 = 1. Não é solução.	✓
3	A3, A17 e A26	9 = 1. Não é solução.	✓
4	A4 e A21	1 = 1. É solução.	x
5	A5 e A9	9 = 1. Não é solução.	✓
6	A6, A20 e A27	9 = 1. Não é solução.	✓
7	A7 e A35	2 = 1. É solução.	x
8	A10 e A32	9 = 1. *	P
9	A13 e A19	9 = 1. Não é solução.	✓
10	A16 e A38	9 = 1. *	P
11	A18 e A40	3 - - 2 + 4 = 1. É solução.	x
12	A24 e A29	9 = 1. Não é solução.	✓
13	A25 e A39	9 = 1. Não é solução.	✓
14	A28 e A36	2 = 1. É solução.	x
15	A31	2 = 1. É solução.	x

Legenda:
RF: Resposta final; ✓: Correta; P: Parcialmente correta; x: Incorreta;
*: A equipe não respondeu se o par ordenado é solução da EL.
**: Consideramos a resolução parcialmente correta as equipes que fizeram o cálculo de verificação correto, mas que porventura não responderam se o par ordenado era solução da EL.
Fonte: Elaborado pelo autor

Sobre a resolução do item citado acima, as equipes 1, 8 e 10, fizeram o cálculo corretamente, porém não apontaram se a tripla ordenada era solução ou não da EL. Devido a esse fato, consideramos a resolução dessas equipes como parcialmente corretas. Já outras equipes, assim como ocorreu na atividade 10 também demonstraram dificuldades de compreensão em **conhecimentos procedimentais** que podem ser vistos na Figura 16:

Figura 16 - Dificuldades das equipes na atividade 11-b.



Fonte: Elaborada pelo autor

Sobre os entraves encontrados acima, observamos que equipe 4 errou o sinal de 4 ao substituírem o valor de *z*. Já equipe 11 não conseguiu terminar o cálculo, apresentando equivocadamente a expressão 3 - -2+4=1 com dois sinais negativos. As equipes 7, 14 e 15 tomaram como base os cálculos do item *a* e acabaram substituindo os valores das incógnitas de maneira errada. Nesse contexto, Rodrigues, Bento e Curi (2012) também encontram alunos de 3º ano do EM com dificuldades em cálculos envolvendo par ordenado no conteúdo de equação da reta. Os autores apontam como solução para tais entraves o trabalho do professor em sala de aula fazendo o uso de diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático.

A próxima subseção mostra a análise do desempenho dos estudantes na resolução da atividade 12.

4.3.1.4 Análise da atividade 12

A atividade 12 (disponível no Quadro 26) é a última atividade da aula 7 e buscava que os alunos encontrassem uma solução para a EL *x-4y=3*. O Quadro 50 traz a luz como se deu o desempenho das equipes investigadas na realização dessa atividade:

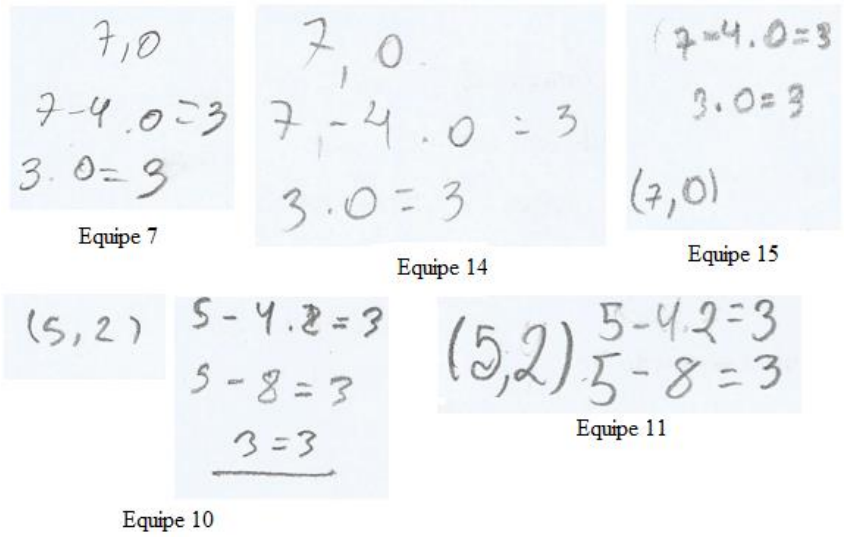
Quadro 50 - Desempenho das equipes na resolução da atividade 12.

Equipes	Participantes	Solução encontrada	RF
1	A1 e A23	(7;1)	✓
2	A2 e A30	(7;1)	✓
3	A3, A17 e A26	(7;1)	✓
4	A4 e A21	(7;1)	✓
5	A5 e A9	(7;1)	✓
6	A6, A20 e A27	(7;1)	✓
7	A7 e A35	(7;0)	x
8	A10 e A32	(7;1)	✓
9	A13 e A19	(-37; -10)	✓
10	A16 e A38	(5;2)	x
11	A18 e A40	(5;2)	x
12	A24 e A29	(7;1)	✓
13	A25 e A39	(11;2)	✓
14	A28 e A36	(7;0)	x
15	A31	(7;0)	x

Legenda:
RF: Resposta final; ✓: Correta; P: Parcialmente correta; x: Incorreta;
*: A equipe não respondeu se o par ordenado é solução da EL.
**: Consideramos a resolução parcialmente correta as equipes que fizeram o cálculo de verificação correto, mas que porventura não responderam se o par ordenado era solução da EL.
Fonte: Elaborado pelo autor

Por meio do Quadro 50, vemos que das 15 equipes investigadas, 10 encontraram uma solução correta para a EL. Outras cinco equipes demonstraram mais uma vez dificuldades de execução no cálculo matemático para verificar se os valores encontrados eram realmente solução da EL. Tal ocorrência é visualizada na Figura 17 que segue:

Figura 17 - Dificuldades das equipes na atividade 12.



Fonte: Elaborado pelo autor

Na figura acima, vemos que as equipes 7, 14 e 15 reportaram o par ordenado (7;0) como solução da EL dada. Entretanto, essas equipes tiveram entraves de execução do cálculo ao resolverem a expressão numérica 7-4.0, a qual efetuaram a operação de subtração antes da multiplicação. Do mesmo modo, as equipes 10 e 11 apontaram (5;2) como solução a EL. Porém, no cálculo de verificação se equivocaram escrevendo erroneamente 5-8=3. Mais uma vez encontramos dificuldades em **conhecimentos procedimentais** por parte dos participantes. Isso no leva a apontar a não apropriação de conteúdos matemáticos estudados pelos estudantes no EF, como a ordem operatória de expressões numéricas e a operação de subtração com números positivos e negativos. Conforme vimos em subseções anteriores, tais obstáculos também foram encontrados com alunos do EM por Holanda, Freitas e Rodrigues (2020) e por Silva e Silva (2013) e necessitam ser tratados desde o EF de modo a serem amenizados.

Assim, finalizamos a análise das atividades da aula 7. A aula 8 que aconteceu no mesmo dia contou com a resolução das atividades 13 a 15 (disponíveis no Quadro 27) cujas análise veremos nas próximas subseções.

4.3.1.5 Análise das atividades 13 a 15

A aula 8 contou a resolução das atividades 13 a 15 disponibilizadas no Quadro 27. Desse modo, a atividade 13 trazia a definição formal de uma SL do tipo 2x2 e solicitava que os alunos assinalassem todos os SL que eram inerentes a esse tipo. Logo em sequência, a atividade 14 indicava a definição formal de um SL *mxn* formado *m* equações e *n* incógnitas e, em seguida,

pedia que os alunos apontassem os tipos dos SLs dados com base nessa definição. Para essa atividade, docente resolveu o item a e solicitou que as equipes respondessem os itens b, c e d. Por fim, a atividade 15 trazia a definição formal da solução de um SL do tipo 2x2 e solicitava que os estudantes verificassem se o par ordenado dado era ou não solução do SL apresentado. Do mesmo modo, nessa atividade para melhor compreensão, o professor pesquisador resolveu na lousa o item a e solicitou que as equipes fizessem o item b. O Quadro 51 mostra como foi o desempenho das equipes na realização dessas três atividades listadas:

Quadro 51 - Desempenho das equipes na resolução nas atividades 13, 14 e 15.

Equipes	Participantes	Atividade 13	RF	Atividade 14	RF	Atividade 15	RF
1	A1 e A23	a) (x) d) (x)	✓ ✓	b) m_2 x n_3 c) m_3 x n_2 d) m_2 x n_2	x x x	3=3 V 17 = 8 F *	✓ ✓ x
2	A2 e A30	a) (x) d) (x)	✓ ✓	b) 2x2 c) 3x2 d) 2x2	✓ ✓ ✓	3=3 V 17 = 8 F Não é solução.	✓ ✓ ✓
3	A3, A17 e A26	a) (x) d) (x)	✓ ✓	b) 2x2 c) 3x2 d) 2x2	✓ ✓ ✓	3=3 V 17 = 8 F Não é solução.	✓ ✓ ✓
4	A4 e A21	a) (x) d) (x)	✓ ✓	b) 2x2 c) 3x2 d) 2x2	✓ ✓ ✓	3=3 V 17 = 8 F Não é solução.	✓ ✓ ✓
5	A5 e A9	a) (x) d) (x)	✓ ✓	b) 2x2 c) 3x2 d) 2x2	✓ ✓ ✓	3=3 V 17 = 8 F Não é solução.	✓ ✓ ✓
6	A6, A20 e A27	a) (x) d) (x)	✓ ✓	b) 2x2 c) 3x2 d) 2x2	✓ ✓ ✓	3=3 V 17 = 8 F Não é solução.	✓ ✓ ✓
7	A7 e A35	a) (x) d) (x)	✓ ✓	b) 3x3 c) 3x2 d) 3x3	✓ ✓ x	3=3 V 17 = 8 F Não é solução.	✓ ✓ ✓
8	A10 e A32	a) (x) d) (x)	✓ ✓	b) 2x2 c) 3x2 d) 2x2	✓ ✓ ✓	3=3 V 17 = 8 F Não é solução.	✓ ✓ ✓
9	A13 e A19	a) (x) d) (x)	✓ ✓	b) 2x2 c) 3x2 d) 2x2	✓ ✓ ✓	3=3 V 17 = 8 F Não é solução.	✓ ✓ ✓
10	A16 e A38	a) (x) d) (x)	✓ ✓	b) 2x2 c) 3x2 d) 2x2	✓ ✓ ✓	3=3 V 17 = 8 F *	✓ ✓ x
11	A18 e A40	a) (x) d) (x)	✓ ✓	b) 2x2 c) 3x2 d) 2x2	✓ ✓ ✓	3=3 V 17 = 8 F Não é solução.	✓ ✓ ✓
12	A24 e A29	a) (x) d) (x)	✓ ✓	b) m_2 x n_3 c) m_3 x n_2 d) m_2 x n_2	x x x	3=3 V 17 = 8 F *	✓ ✓ x
13	A25 e A39	a) (x) d) (x)	✓ ✓	b) 2x2 c) 3x2 d) 2x2	✓ ✓ ✓	3=3 V 17 = 8 F Não é solução.	✓ ✓ ✓
14	A28 e A36	a) (x) d) (x)	✓ ✓	b) 3x3 c) 3x2	✓ ✓	3=3 V 17 = 8 F	✓ ✓

				d) 3x3	x	Não é solução.	☑
15	A31	a) (x) d) (x)	☑ ☑	b) 3x3 c) 3x2 d) 3x3	☑ ☑ x	3=3 V 17 = 8 F Não é solução.	☑ ☑ ☑

Legenda:
RF: Resposta final; ☑: Correta; x: Incorreta; V: Sentença matemática verdadeira; F: Sentença matemática falsa.
*: A equipe não respondeu se o par ordenado é solução do SL.
Fonte: Elaborado pelo autor

Por meio do Quadro 51 vemos que todas as equipes participantes assinalaram de maneira correta os SLs dos itens *a* e *d* como sendo SL do tipo 2x2. Já em relação a resolução da atividade 14, as equipes 7, 14 e 15 erraram os itens *b* e *d* da mesma maneira, colocando que os SLs tinham 3 equações e 3 equações. Esse erro pode ter sido causado devido ao fato de os alunos terem um construto mental equivocado de que todo SL tem que ter necessariamente a mesma quantidade de equações e incógnitas. Já as equipes 1 e 12 mostraram dificuldades de compreensão para registrar a notação correta do tipo de um SL mxn. Os diálogos abaixo mostram alguns questionamentos de alunos sobre a quantidade de equações e de incógnitas de um SL durante momento da aula que abarcou a resolução da atividade 14:

> *A23: Professor, os valores m e n tem que ser sempre igual pra todo mundo?*
> *P: Não necessariamente tá. Pode ter várias equações e várias incógnitas e a quantidade não precisa ser igual. Sistema linear ele pode ter várias equações e várias incógnitas tá. Olha o que acontece ai no exemplo 14-b.*
> *A23: Verdade.*
> *[...]*
> *A25: Professor, olha aqui. Pode ter mais incógnitas do que equações?*
> *P: Pode acontecer de ter mais equações do que incógnitas e vice-versa. Pode ter mais incógnitas do que equações.*

Nos diálogos, vemos primeiramente a aluna A23 questionar o professor sobre a necessidade do número de equações *m* e o número de incógnitas *n* de SL serem iguais. Já a aluna A25, ao observar o item *b* da atividade 14 pergunta se um SL pode ter mais incógnitas do que equações. Sobre esse panorama de dificuldades na atividade 14, Silva (2006) em sua pesquisa com 150 alunos de 2º e 3º anos do EM verificou entraves dos estudantes com relação a interpretação e escrita matemática. O autor aponta que esse quadro pode ser causado por um ensino automatizado, de memorização, preso a fórmulas e algoritmos necessitando ser contornado por ações de ensino que tragam uma aprendizagem mais significativa.

Por fim, a atividade 15 cujo item b solicitava que se verificasse se o par ordenado (5;2) era solução do SL $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$, apontou no Quadro 51 que todas as equipes substituíram o par ordenado de maneira correta na primeira equação encontrando com sucesso a sentença matemática verdadeira 3=3. E da mesma forma, ao substituírem o mesmo par ordenado na segunda equação, encontraram de forma correta a sentença matemática falsa 17=8. Entretanto, ao finalizar a resolução da atividade proposta, percebemos que as equipes 1, 10 e 12 deixaram de responder se o par ordenado dado era ou não solução do SL. Esses entraves de deixar conferir o resultado de uma atividade proposta também foi encontrada por Gonçalves e Proença (2020) ao trabalharem equação de 2º grau com estudantes do 1º ano do EM.

Desse, finalizamos a análise das atividades da aula 8. A próxima subseção dissertará sobre a análise realizada das atividades inerentes a aula 9.

4.3.2 Análise da aula 9 – classificação de um SL e método da adição

A aula 9 ocorreu em uma aula de 50 minutos no dia 16 de agosto de 2022. Em relação a *definição do conteúdo*, trabalhamos a solução de um SL do tipo 2 por 2 por meio do método da adição. Participaram dessa abordagem da aula 28 alunos divididos em 13 equipes, sendo: 9 duplas, 3 trios e um aluno de maneira individual. Objetivando a compreensão dos estudantes para a abordagem dessa aula, foi realizada a atividade 16 (Quadro 28), a qual dissertaremos na subseção que segue.

4.4.2.1 Análise da atividade 16

No início da aula 9, o professor buscou retomar com os alunos o método da adição usado na resolução de SL com duas equações e duas incógnitas, vistos na etapa 1 durante a *articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo* e que apontamos na Figura 8. Foi um momento de o professor elencar com os estudantes conhecimentos prévios que eles poderiam já ter adquirido no EF, já que o algoritmo do método da adição é trabalhado geralmente no 8º ano dessa etapa de ensino. Após perguntar as equipes se estas já haviam estudado ou lembravam desse conteúdo, apenas os alunos A24, A29 e A39 manifestaram a lembrança de se recordarem do método e ajudaram o professor na explanação da atividade 16 item *a* na lousa, o qual era um SPD. Em seguida, o professor resolveu também na lousa, o item *b* (SPD), o item *c* (SPI) e o

item *d* (SI). De modo que os alunos praticassem e compreendessem a resolução de um SL 2 por 2 pelo método abordado, solicitou-se que as equipes fizessem os itens: *e* (SPD), *f* (SPI) e *g* (SI). O Quadro 52 aborda como se deu o desempenho dos alunos e as dificuldades apresentadas por eles na resolução dessas atividades:

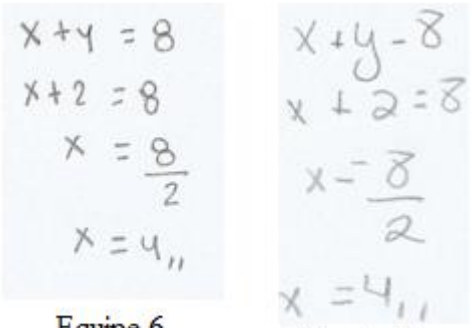
Quadro 52 - Desempenho as equipes na resolução na atividade 16.

Equipes	Participantes	$E)\ \begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=14 \end{cases}$	RF	$F)\ \begin{cases} m+n=-2 \\ 3m+3n=-6 \end{cases}$	RF	$G)\ \begin{cases} a+b=9 \\ 2a+2b=1 \end{cases}$	RF
1	A1 e A23	S = {6;2} SPD	✓ ✓	S = {-α-2, α} SPI	✓ ✓	S = { } SI	✓ ✓
2	A2 e A30	S = {6;2} SPD	✓ ✓	S = {-α-2, α} SPI	✓ ✓	S = { } SI	✓ ✓
3	A3, A17 e A26	S = {6;2} SPD	✓ ✓	S = {-α-2, α} SPI	✓ ✓	S = { } SI	✓ ✓
4	A4 e A16	S = {6;2} SPD	✓ ✓	S = {-α-2, α} SPI	✓ ✓	S = { } SI	✓ ✓
5	A5 e A9	S = {6;2} SPD	✓ ✓	S = {-α-2, α} SPI	✓ ✓	S = { } SI	✓ ✓
6	A6, A20 e A27	S = {4;4} SPD	x ✓	S = {-α-2, α} SPI	✓ ✓	S = { } SI	✓ ✓
7	A7 e A35	S = {4;4} SPD	x ✓	S = {-α-2, α} *	✓ x	S = { } SI	✓ ✓
8	A10 e A32	S = {6;2} SPD	✓ ✓	S = {-α-2, α} SPI	✓ ✓	S = { } SI	✓ ✓
9	A18, A31 e A40	S = {6;2} SPD	✓ ✓	S = {-α-2, α} SPI	✓ ✓	S = { } SI	✓ ✓
10	A19	S = {6;2} SPD	✓ ✓	S = {-α-2, α} SPI	✓ ✓	S = { } SI	✓ ✓
11	A24 e A29	S = {6;2} SPD	✓ ✓	S = {-α-2, α} SPI	✓ ✓	S = { } SI	✓ ✓
12	A25 e A39	S = {6;2} SPD	✓ ✓	S = {-α-2, α} SPI	✓ ✓	S = { } SI	✓ ✓
13	A28 e A36	S = {6;2} SPD	✓ ✓	S = {-α-2, α} SPI	✓ ✓	S = { } SI	✓ ✓

Legenda:
RF: Resposta final; ✓: Correta; x: Incorreta.
*: A equipe não classificou o SL resolvido.
Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Quadro 52, na atividade 16-e percebemos que 11 das 13 equipes participantes apontaram corretamente a solução S={6;2} e a classificação SPD para o SL dado. Entretanto, as equipes 6 e 7 tiveram dificuldades de **conhecimentos procedimentais** e calcularam de maneira equivocada o valor da incógnita x durante a resolução do SL conforme observamos na Figura 18 a seguir:

Figura 18 – Dificuldades as equipes na resolução da atividade 16-e.



Equipe 6 Equipe 7

Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 18 vemos que as equipes 6 e 7 tiverem dificuldades de **conhecimentos procedimentais** na execução do cálculo da atividade proposta pelo item e. As duas equipes, ao resolverem a EL $x+2=8$ ao invés de subtraírem 2 unidades dos dois membros da equação, acabaram dividindo por 2 os dois membros da equação. Tais entraves de alunos na resolução de equações de 1º grau são apontadas em pesquisas como de Pacheco (2009) que encontrou dificuldades em operações algébricas, regra de sinais e procedimentos de resolução de equações com alunos do 8º ano do EF. Já Freitas (2002) ao pesquisar o mesmo conteúdo com alunos do 1º ano EM apontou obstáculos relacionados a transposição de incógnitas e de termos independentes na resolução algorítmica de equações. Sobre esse quadro preocupante, os autores enfatizam a necessidade de estudos que deem mais atenção a álgebra escolar com ênfase na realidade das escolas brasileiras.

Relativo a entraves no item f equipe 7 realizou o cálculo de maneira correta, entretanto ao finalizarem a resposta não classificaram o SL resolvido como SPI. Finalmente, no item g todas as equipes participantes lograram êxito na resolução do SL proposto apresentando a solução e classificação de maneira correta.

Em uma visão geral, podemos inferir que as equipes demonstraram a compreensão do algoritmo do método da adição para resolução de SL com duas equações e duas incógnitas, bem como em apontar a classificação de cada SL dado. Após essa atividade, se deu-se nas aulas 10 e 11 a *definição do conteúdo* do Teorema de Cramer como uma alternativa para resolução de SL tanto do tipo 2 por 2 quanto do tipo 3 por 3. A análise dessas aulas é que faremos a seguir.

Mais uma vez, de modo a facilitar a análise dessas aulas separamos cada uma delas nas subseções que seguem.

4.3.3 Análise das aulas 10 e 11 – teorema de Cramer na resolução de SL do tipo SPD

A aula 10 transcorreu em uma aula de 50 minutos no dia 16 de agosto de 2022, ou seja, na sequência da aula 9. Já a aula 11 realizou-se em duas aulas de 50 minutos no dia 18 de agosto de 2022. Sobre essa aula 11, justificamos ter durado o dobro do tempo previsto, devido ao fato de dissertar sobre o Teorema de Cramer para resolução de SL com 3 equações e 3 incógnitas cujo algoritmo necessitava do cálculo de 4 determinantes do tipo 3 por 3 com o uso da Regra de *Sarrus*, o que tornou o processo moroso e a extensão do tempo de uma para duas aulas.

Outro fato inerente a aula 11 foi que ela ocorreu em um dia muito chuvoso e contou com a participação de apenas 20 alunos divididos em 10 equipes, sendo 7 duplas e 2 trios. Sobre a análise das aulas 10 e 11, nas quais foram realizadas respectivamente as atividades 17 e 18 (disponibilizadas nos Quadros 29 e 30), é que traçaremos inferências nas duas próximas subseções.

4.3.3.1 Análise da atividade 17 – teorema de Cramer na resolução de SL com duas equações e duas incógnitas

A atividade 17 trazia a abordagem sobre o Teorema de Cramer como uma alternativa para resolução de SL que tinham a classificação SPD, retomando o conteúdo de determinantes aprendido previamente e que era necessário para execução do teorema abordado. Sobre o enunciado dessa atividade, esse pedia que se resolvesse os SLs com duas equações e duas incógnitas por meio do Teorema de Cramer e, se seguida, que se classificasse tal SL. No momento da aula, o professor explanou na lousa sobre a resolução do item *a* e solicitou as equipes que resolvessem o item *b*. O Quadro 53 a seguir mostra o desempenho das equipes de estudantes na resolução dessa atividade:

Quadro 53 - Desempenho das equipes na resolução na atividade 17-b.

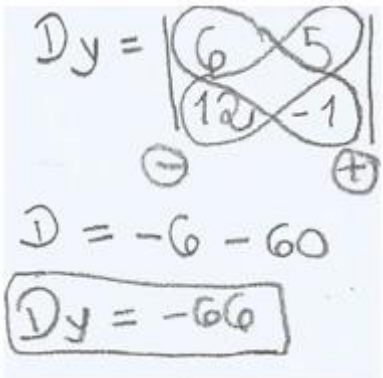
Equipes	Participantes	$B)\ \begin{cases} 5x + y = 6 \\ -x + 2y = 12 \end{cases}$	RF
1	A1 e A23	S = {0;6} SPD	☑ ☑
2	A3, A17 e A26	S = {0;6} *	☑ ☑
3	A4 e A16	S = {0;6} SPD	☑ ☑
4	A6, A20 e A27	S = {0;6} *	☑ ☑

5	A10 e A32	S = {0;6} *	☑ ☑
6	A13 e A19	S = {0;6} SPD	☑ ☑
7	A18, A31 e A40	S = {0;6} SPD	☑ ☑
8	A21 e A30	S = {0;-6} SPD	x ☑
9	A24 e A29	S = {0;6} SPD	☑ ☑
10	A28 e A36	S = {0;6} SPD	☑ ☑

Legenda:
RF: Resposta final; ☑: Correta; x: Incorreta.
*: A equipe não classificou o SL resolvido.
Fonte: Elaborado pelo autor

No Quadro 53 vemos que 9 das 10 equipes participantes resolveram corretamente o SL proposto usando o Teorema de Cramer e apontando sua classificação. Porém, equipe 8 teve dificuldades no processo de resolução como vemos na Figura 19 abaixo:

Figura 19 - Dificuldades da equipe 8 na resolução da atividade 17-b.



Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 19, verificamos que equipe 8 encontrou dificuldades de **conhecimentos procedimentais** no cálculo do determinante D_y pois inverteram os valores da segunda linha desse determinante, cuja forma correta era -1 e 12, dessa maneira o resultado encontrado pelas estudantes foi -66 em contrapartida do resultado correto +66. Já as equipes 2, 4 e 5 fizeram o cálculo pelo Teorema de Cramer de maneira correta, porém não apontaram a classificação do SL dado.

Sobre as dificuldades encontradas pela equipe 8, Silva, J. A. (2019) já havia alertado sobre a necessidade de melhoria de métodos algébricos para resolução da SL com alunos do 8º

ano e percebemos que tal essa necessidade também se faz necessária com estudantes do 2º ano EM. Sobre esse panorama, acreditamos que precisa ser tratado ainda no EF por metodologias de ensino e aprendizagem que busquem amenizar as dificuldades encontradas.

A próxima subseção nos leva a análise da atividade 18 que versou sobre o uso do Teorema de Cramer para resolução de SL com 3 equações e 3 incógnitas.

4.3.3.2 Análise da atividade 18 – teorema de Cramer na resolução de SL com três equações e três incógnitas

A atividade 18 buscou a *definição de conteúdo* para o uso do Teorema de Cramer em SL com três equações e três incógnitas. A aula deu início com o professor pesquisador explicando sobre os processos algorítmicos do item *a* da atividade e pediu para que as equipes fizessem a resolução dos itens *b* e *c*. O Quadro 54 denota como se deu o desempenho dos alunos na resolução desses dois itens dessa atividade:

Quadro 54 - Desempenho das equipes na resolução nas atividades 18-b e 18-c.

Equipes	**Participantes**	$B)\begin{cases} x+2y+z=9 \\ 3x+y=-5 \\ 2y+z=11 \end{cases}$	**RF**	$C)\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+y+2z=9 \\ -x+3y+z=7 \end{cases}$	**RF**
1	A1 e A23	*	*	*	*
2	A3, A17 e A26	S = {(-2;1;9)}	☑	S = {(4;1}	☑
3	A4 e A16	S = {(-2;1;9)}	☑	Erros no cálculo resolutivo.	x
4	A6, A20 e A27	S = {(-2;1;9)}	☑	S = {(0;1;4}	☑
5	A10 e A32	S = {(-2;1;9)}	☑	S = {(0;1;4}	☑
6	A13 e A19	S = {(-2;1;9)}	☑	S = {(0;1;4}	☑
7	A18, A31 e A40	*	*	Erros no cálculo resolutivo.	x
8	A21 e A30	S = {(-2;1;9)}	☑	Erros no cálculo resolutivo.	x
9	A24 e A29	S = {(-2;1;9)}	☑	S = {(0;1;4}	☑
10	A28 e A36	*	*	*	*

Legenda:
RF: Resposta final; ☑: Correta; x: Incorreta.
*: A equipe não fez o SL proposto.
Fonte: Elaborado pelo autor

O Quadro 54 mostra que na resolução do item b da atividade 18, 7 das 10 equipes investigadas resolveram de maneira correta o SL dado, sendo que as equipes 1, 7 e 10 deixaram de efetuar a resolução da atividade solicitada. Concernente a resolução do item c, o quadro acima aponta que apenas 5 equipes fizeram a resolução correta do SL usando o Teorema de

Cramer. Para esse item, as equipes 3, 7 e 8 apresentaram erros no cálculo resolutivo e as equipes 1 e 10 deixaram de apresentar a resolução da atividade.

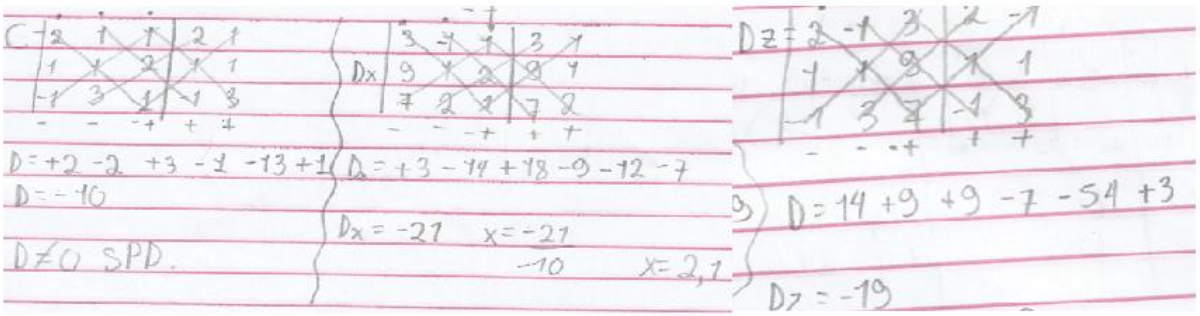
Sobre o item *b*, esse apresentava na segunda linha o coeficiente zero para a incógnita z e, na terceira linha, o coeficiente zero para a incógnita x. Com o início da resolução, não demorou muito tempo para que as equipes começassem a demonstrarem sua compreensão sobre esse fato. Os diálogos a seguir, mostram como se deu esse fato com alguns alunos durante o desenvolvimento da aula:

> *A39: Hein professor. Quando não tem número coloca o zero aqui?*
> *P: Isso. Quando não tem o x, tá faltando o z, você coloca o zero. Tá faltando o x, coloca zero. Entendeu? Isso na letra b, isso acontece né.*
> *A39: Ah não tem o z, coloca zero ali na linha [segunda linha]. Ah não tem o x, coloca zero ali na linha [terceira linha].*
> *P: Sim.*
>
> *A2: Professor, que bom que você tá aqui, eu tenho uma pergunta?*
> *P: Na b né.*
> *A2: Na b... A gente vai calcular, na hora de fazer o y. Aqui o y.*
> *P: O x da primeira equação é 1 e da segunda?*
> *A2: Zero e zero.*
> *P: Não. Três!*
> *A2: Ah... Dai vai pra frente. É isso que eu quero saber.*
> *P: E na terceira equação, quanto que vale o x?*
> *A2: Zero.*
> *P: Zero.*
> *A2: Entendi.*
> *P: Quando não tem uma variável na equação, coloca zero.*

No primeiro diálogo notamos que o aluno A39 identifica o coeficiente z igual a zero na segunda linha e zero para x na terceira linha do SL dado. Para confirmar esse fato, questiona o docente para ter certeza de que sua compreensão estava correta. Já o aluno A2 tem uma dificuldade de **conhecimento procedimental** ao indicar que na segunda linha, devido ao termo 3x estar digitado de maneira mais a frente na equação aponta que o coeficiente de 3x é zero. Tal erro é refutado e explanado de maneira correta pelo professor.

Relativo ao item c, a Figura 20 elucida ao leitor como se deram as dificuldades da equipe 3 na resolução da atividade proposta por esse item:

Figura 20 – Dificuldades da equipe 3 na atividade 18-c.



Fonte: Elaborada pelo autor

Pela Figura 20 acima, observamos que a equipe 3 teve dificuldades ao executar a resolução por meio de determinantes ao aplicarem o Teorema de Cramer, apontando para entraves de **conhecimentos procedimentais.** Nesse sentido, equipe errou o cálculo resolutivo dos determinantes D, Dx e Dz. No determinante D erraram o coeficiente de -y na primeira linha, colocando 1 ao invés de -1. Em Dx o erro aconteceu na terceira, cujo coeficiente de 3y era 3 e a dupla colocou 2. Por fim, em Dz o errou procedimental se deu no termo -7 cujo sinal correto era positivo, ou seja, +7 ocasionando um resultado equivocado.

A equipe 7 foi outra equipe que apresentou entraves de **conhecimentos procedimentais** ao calcular os valores das incógnitas no item c. Dessa maneira, equipe errou os determinantes D, Dx e Dy e não fez o determinante Dz nem os cálculos das variáveis x, y e z. No determinante D o erro também se deu no coeficiente de -y os quais apontaram erroneamente como sendo 1. Em Dx, a dificuldade ocorreu na multiplicação de diagonais principais e secundárias no cálculo do determinante ao aplicarem a Regra de *Sarrus.* Por fim, em Dy o erro se deu no resultado ao efetuarem as operações de adição e subtração para alcançarem o resultado.

Nesse panorama de dificuldades em **conhecimentos procedimentais**, a equipe 8 fez o cálculo equivocado dos 4 determinantes envolvidos na resolução do item *c.* Em D, o erro mais uma vez se deu no coeficiente de -y na primeira linha. Em Dx, os equívocos se deram nos resultados -9 e -18 cujos sinais corretos seriam positivos. Nos determinantes Dy e Dz as dificuldades se encontraram nas operações de adição e subtração no caminho até o resultado procurado.

Relativo os entraves encontrados pelas equipes supracitadas na atividade 18, vemos que Jordão e Bianchini (2012) também encontraram resultados semelhantes ao pesquisarem alunos de 2º e 3º do EM com o conteúdo de SL. Visando contornar esse quadro, as autoras procuraram trabalhar o ensino da solução gráfica de SL por meio do *software* Winplot, encontrando assim resultados significativos de aprendizagem. Suleiman (2016) ao entrevistar 12 professores da

educação básica do interior do Estado de São Paulo, verificou que os docentes investigados apontaram grandes dificuldades de seus alunos de ensino médio no conteúdo de SL relativos a dificuldades no cálculo algébrico. Concernente a esses obstáculos, os professores apontaram a necessidade de melhorias na formação inicial e continuada, bem como o uso de metodologias de ensino em sala de aula de modo a amenizar tais dificuldades.

Em olhar para a *definição de conteúdo* abordada nas aulas 10 e 11 que dissertaram sobre o Teorema de Cramer para resolução de SL classificados como SPD, observamos que a grande maioria dos participantes compreenderam o algoritmo a ser executado para sua resolução. Entretanto, algumas poucas equipes apresentaram dificuldades envolvendo **conhecimentos procedimentais** seja no cálculo de determinantes ou em operações simples de adição e subtração com números positivos e negativos. Infelizmente, três equipes pesquisadas optaram por não realizar as tarefas solicitadas pelas atividades 18-b e 18-c.

4.3.4 Análise da aula 12 – definindo e resolvendo sistemas escalonados

A aula 12 ocorreu em uma aula de 50 minutos no dia 23 de agosto de 2022. Mais uma vez, a aula ocorreu em um dia chuvoso e contou com a participação de apenas 26 alunos. Dessa forma, as equipes foram divididas em 10 duplas e 2 trios. A *definição do conteúdo* envolveu SL escalonados no qual o docente apresentou a definição desse conceito e, na lousa explanou a resolução dos exemplos 1, 2 e 3. Em seguida, as equipes fizeram a atividade 19 (do Quadro 31) de modo concretizarem a compreensão e entendimento dos exemplos apresentados. A análise da atividade 19 será apresentada a seguir.

4.3.4.1 Análise da atividade 19 – resolução e classificação de SL escalonados

A atividade 19 (disponibilizada no Quadro 31) pedia para que os alunos resolvessem e classificassem dois SLs escalonados com 3 equações e 3 incógnitas. Sendo o SL do item a dado por $\begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ y - z = 1 \\ 4z = 4 \end{cases}$ e do item b dado por $\begin{cases} x + y + 3z = 7 \\ y + z = 6 \end{cases}$. O Quadro 55 mostra como se deu o desempenho e as dificuldades das equipes na realização dessa atividade:

Quadro 55 – Desempenho e dificuldades das equipes na resolução na atividade 19.

Equipes	Participantes	Item a - Dificuldades	RF	Item b - Dificuldades	RF

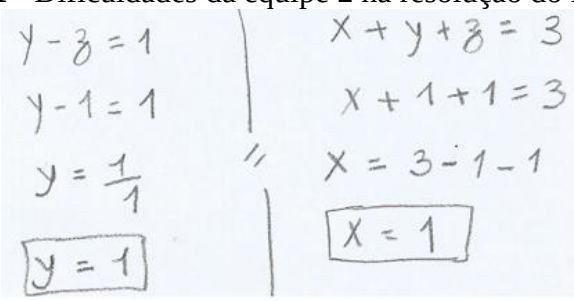
1	A1 e A23	- Não colocou a solução. - Não classificou o SL.	P*	- Expressou a solução na ordem errada das variáveis. - Não colocou a solução. - Não classificou o SL.	P
2	A2 e A30	- Calculou errado os valores de y e z.	x	-	☑
3	A3, A17	- Não classificou o SL.	P	- Não classificou o SL.	P
4	A5 e A9	- Expressou a solução na ordem errada das variáveis.	P	-	☑
5	A6, A20 e A27	-	☑	-	☑
6	A7 e A35	- Expressou a solução na ordem errada das variáveis.	P	-	☑
7	A10 e A32	- Expressou a solução na ordem errada das variáveis. - Não classificou o SL.	P	- Expressou a solução na ordem errada das variáveis. - Não classificou o SL.	x
8	A13 e A19	-	☑	- Calculou errado o valor de x.	x
9	A16 e A38	- Expressou a solução na ordem errada das variáveis. - Não classificou o SL.	P	- Expressou a solução na ordem errada das variáveis. - Não classificou o SL.	☑
10	A18, A31 e A40	- Expressou a solução na ordem errada das variáveis.	P	- Calculou errado o valor de x.	x
11	A24 e A29	- Não classificou o SL.	P	- Não classificou o SL.	P
12	A25 e A39	- Calculou errado os valores de y e z.	x	- Expressou a solução na ordem errada das variáveis.	P

Legenda:
RF: Resposta final; P: Parcialmente correta; ☑: Correta; x: Incorreta.
*Consideramos a resposta final parcialmente correta para aquelas equipes que fizeram o cálculo das variáveis de forma correta, mas colocaram a solução e/ou classificação do SL de forma incorreta ou deixaram de fazê-la.
Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Quadro 55, vemos que o item a foi feito de maneira correta apenas pelas equipes 5 e 8. Tivemos equipes que fizeram esse item de maneira parcialmente correta: as equipes 4, 6, 7, 9 e 10 expressaram a solução na ordem errada das variáveis expressando S = {(1;2;3)} ao invés da forma correta S = {(3;2;1)}; equipe 1 não expressou a solução do SL dado; e as equipes 1, 3, 7, 9 e 11 não classificaram o SL após a resolução do exercício. Por fim, os 2 e 12 erram a

atividade em virtude de cálculos matemáticos incorretos para as incógnitas y e z. A Figura 21 ilustra a dificuldade da equipe 2 na resolução do item a:

Figura 21 - Dificuldades da equipe 2 na resolução do item 19-a.

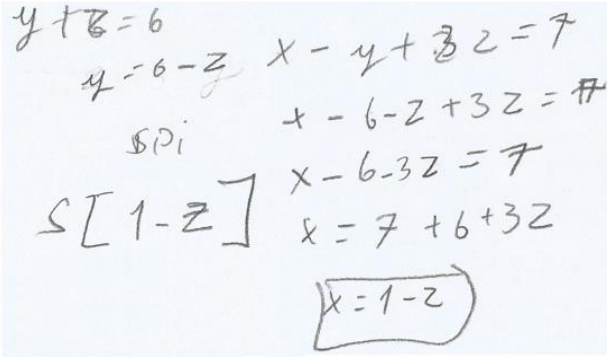


Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 21 acima constatamos que as alunas A2 e A30 tiveram dificuldades no item *a,* ao calcularem o valor de y, ao invés de somarem 1 unidade aos dois membros da equação acabaram dividindo os dois membros por 1. Esse erro no cálculo da variável y acabou por consequência causando o erro ao se calcular a variável x.

Sobre o desempenho no item b, verificamos que as equipes 2, 4, 5, 6 e 9 fizeram a resolução do SL corretamente, apontando sua solução e classificação. Entre as equipes que fizeram parcialmente correta: as equipes 2, 7, 9 e 12 expressaram a solução na ordem errada; a equipe 1 não apontou a solução do SL; e as equipes 1, 3, 7, 9 e 11 não classificaram o SL proposto. Além disso, as equipes 8 e 10 tiveram erros de cálculo na variável x e erraram a resolução do SL. A Figura 22 apresenta as dificuldades da equipe 10 ao resolverem o item b:

Figura 22 - Dificuldades da equipe 10 na resolução do item 19-b.



Fonte: Elaborada pelo autor

A Figura 22 mostra que a equipe 10 na resolução do item *b*, isolou de maneira correta a incógnita y na segunda equação. Porém, ao substituírem o valor encontrado na primeira equação erram ao reduzirem os termos -z+3z colocando o resultado -3z de maneira equivocada. Desse modo, a resposta encontrada foi errada e, além disso, os alunos expressaram a solução de maneira errada, sem o uso do sinal de igualdade e de chaves e adotando colchetes.

Ao finalizar a análise relativa à atividade 19, notamos a compreensão e entendimento da maioria das equipes no algoritmo resolutivo de sistemas escalonados. Por outro lado, algumas equipes demonstraram dificuldades de execução no cálculo algébrico ao resolverem as equações presentes e não se atentaram a resposta final da solução e quanto a classificação do SL que resolveram. Assim, vemos que os obstáculos de **conhecimentos procedimentais** das equipes investigadas concentraram-se em relação ao cálculo algébrico sobretudo em manipulações algébricas de equações.

Nesse sentido, trabalhos como de Souza (2019) e Chinnappan (2004) com alunos de EF e EM, respectivamente, apontaram investigações cujos estudantes tiveram dificuldades de cálculos e manipulações em conteúdos algébricos. Segundo os autores dos dois estudos, essas dificuldades de **conhecimentos procedimentais** estavam associadas a obstáculos em demandas de **conhecimentos conceituais** dos conteúdos trabalhados**.** Sobre esse fato, Souza (2019) e Chinnappan (2004) enfatizam a necessidade de mais trabalhos abarcando o conhecimento conceitual de conteúdos algébricos em sala de aula.

A próxima subseção tratará da análise do desempenho dos alunos nas atividades que abarcaram o escalonamento de SL.

4.3.5 Análise das aulas 13 e 14 – abordando o escalonamento de SL

As aulas 13 e 14 de nossa organização de ensino visavam realizar a abordagem de ensino visando a *definição do conteúdo* de escalonamento de SL. Nesse contexto, a parte introdutória desse conteúdo matemático se deu na aula planejada 13 e aconteceu em uma aula de 50 minutos no dia 23 de agosto de 2022, na sequência aula 12 que ocorreu no mesmo dia. Já a aula 14 planejada teve sua abordagem em 2 aulas de 50 minutos no dia 25 de agosto de 2022. Tanto na aula 13 quanto na aula 14 abordaram a resolução da atividade 20 (disponível no Quadro 32). A análise das aulas e da resolução da atividade proposta é o que abordaremos a seguir.

4.3.5.1 Análise da atividade 20 – escalonando SL

Na aula 13 no dia (23/08/2022), o professor pesquisador leu e discutiu com os alunos a definição de sistemas equivalentes, o teorema 1 e o teorema 2 conforme a folha de atividades que apresentamos no anteriormente no Quadro 20. Após esse momento, o professor explanou na lousa de forma dialogada o escalonamento do SL do item $a)$ $\begin{cases} x+2y+z = 8 \\ 2x+5y-z = 9 \\ 3x+y+z = 8 \end{cases}$ da atividade 20, apresentando ao final sua solução e sua classificação como SPD.

Já no dia (25/08/2022), o professor trabalhou a aula 14 dando prosseguimento a resolução da atividade 20 iniciada na aula anterior. Nesse dia, mais uma vez devido a fortes chuvas que atingiram a cidade, muitos alunos faltaram e apenas 18 estudantes participaram dessa aula sendo divididos em 9 equipes (7 duplas, um trio e um aluno de maneira individual). Do mesmo modo que na aula passada, o pesquisador fez agora o SL que era um SI do item $b)$ $\begin{cases} 2x+y-z = 8 \\ x-3y = 0 \\ 3x-2y-z = 2 \end{cases}$ e outro SL classificado como SPI no item $c)$ $\begin{cases} x+y+z = 6 \\ 3x-y+z = 2 \\ 4x+4y+4z = 2 \end{cases}$.

Ao findar o momento de explanação da atividade 20 que estava disposta na folha entregue aos estudantes, o professor passou na lousa mais dois SL de modo a permitir que as equipes pesquisadas pudessem praticar o processo algoritmo requerido pelo conteúdo, melhorando seu desempenho, entendimento e compreensão. Além disso, esses itens extras serviram de instrumento de coleta de dados de modo a avaliarem esse processo. Tais itens não estavam no planejamento inicial de nossa organização de ensino e foram planejados pelo docente apenas um dia antes da abordagem da atividade 20. Por isso, apontamos que foram adicionados o item *d)* $\begin{cases} x+2y+z = 9 \\ 2x+y-z = 3 \\ 3x-y-2z = -4 \end{cases}$ e o item *e)* $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ 2x+y-3z = 4 \\ 3x+2y-2z = 5 \end{cases}$ cujas classificações eram, respectivamente, SPD e SPI.

Em relação a resolução desses itens extras solicitados pelo professor pesquisador, das 9 equipes participantes, 5 acertaram de maneira correta e completa o item *d* e 3 equipes de maneira correta e completa o item *e*. O Quadro 56 detalha como ocorreram o desempenho e as dificuldades das equipes ao resolverem as atividades solicitadas:

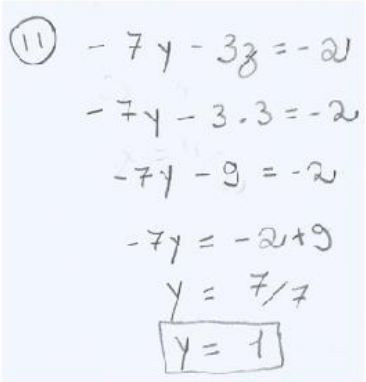
Quadro 56 – Desempenho e dificuldades das equipes na resolução na atividade 20.

Equipes	Participantes	Item d - Dificuldades	RF	Item e - Dificuldades	RF
1	A1 e A23	- Errou o sinal na equação II.	x	-	☑
2	A2 e A30	-	x	- Errou o cálculo de x na equação I.	x
3	A3, A17	- Errou o sinal na equação I.	x	-	☑
4	A4 e A21	- Não escreveu a solução. - Não classificou o SL.	P*	- Errou o cálculo de x na equação I.	x
5	A6, A20 e A27	-	☑	- Errou o cálculo de x na equação I.	x
6	A10 e A32	-	☑	- Errou o cálculo de x na equação I.	x
7	A19	-	☑	-	☑
8	A24 e A29	-	☑	-	☑
9	A25 e A39	- Errou o sinal na equação II.	x	**	**

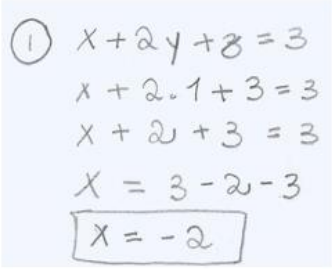
Legenda:
RF: Resposta final; P: Parcialmente correta; ☑: Correta; x: Incorreta.
*Consideramos a resposta final parcialmente correta para aquelas equipes que fizeram o cálculo das variáveis de forma correta, mas não colocaram a solução e/ou classifcação do SL.
**A equipe não fez a atividade proposta.
Fonte: Elaborado pelo autor

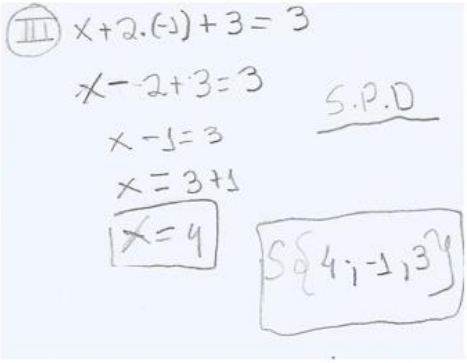
No Quadro 56 acima observamos que no item *d*, as equipes 1, 3 e 9 erraram sinais numéricos ao efetuarem os cálculos necessários apontando para erros de origem em **conhecimentos procedimentais.** Verificamos ainda que a equipe 4 não escreveu a solução e não classificou o SL conforme solicitado no enunciado da atividade. Já no item *e*, também com entraves em **conhecimentos procedimentais,** as equipes 2, 4, 5 e 6 erraram o cálculo de x na equação I e por fim, a equipe 9 não fez a resolução desse item. A Figura 23 traz a luz as dificuldades das equipes 2 e 3 na resolução do item *d* da atividade 20:

Figura 23 – Dificuldades de conhecimentos procedimentais das equipes na atividade 20-d.



Equipe 2



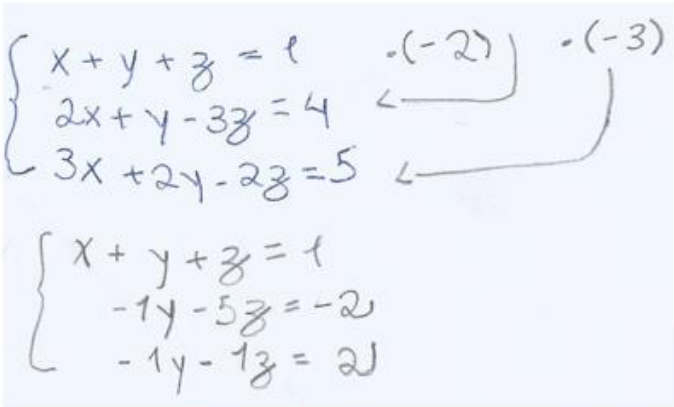


Equipe 3

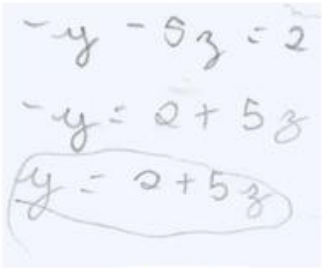
Fonte: Elaborada pelo autor

Ao observarmos a Figura 23 nos atentamos que as duplas de alunas da equipe 2 apresentaram dificuldades na execução correta do cálculo na equação II, na qual colocaram equivocadamente $y = \frac{7}{7}$ sendo o correto $y = \frac{7}{-7}$. Com isso, o resultado de y na equação II ficou incorreto e consequentemente o valor de x na equação I também. Já a equipe 3 errou o cálculo -2+3 apontando equivocadamente o resultado -1, sendo o correto +1. Desse modo, o valor final de x acabou sendo errado. Agora, sobre a resolução do item *e*, a Figura 24 mostra os entraves das equipes 2 e 6 durante o processo resolutivo:

Figura 24 – Dificuldades das equipes 2 e 6 na atividade 20-e.



Equipe 2



Equipe 6

Fonte: Elaborada pelo autor

Pela Figura 24 observamos que a equipe 2, se equivocou ao eliminar a incógnita x nas segundas e terceiras equações do SL. Desse modo, acabaram tendo erros procedimentais encontrando -1y-5z=2 na equação II quando o correto, seria o termo independente igual a -2. Além disso, apontou -1y-1z=2 na equação III, sendo termo correto -5z. Já as alunas da equipe 6 se equivocaram na passagem da equação II: -y= 2+5z apontando y=2+5z quando o correta seria y=-2-5z.

Sobre as dificuldades dos estudantes na resolução da atividade 20 que pairaram sobre o fato de recorrentes erros procedimentais, sobretudo de cálculos numéricos e algébricos, podemos apontar que Freitas e Guadagnini (2013) também perceberam tais dificuldades ao trabalharem o conteúdo de equações do 2º grau com alunos do 9º ano do EF no qual verificaram erros de tratamento algébrico originários da manipulação algébrica. Do mesmo modo, Brum e

Cury (2013) quando trabalharam atividades de álgebra com estudantes do 9º ano do EF verificaram dificuldades relativas a técnicas algébricas, apontando a falta de prerrequisitos. Para essas autoras, "os resultados mostram que esses estudantes ainda não desenvolveram o pensamento algébrico, pois não sabem expressar abstrações e generalizações" (BRUM, CURY, 2013, p. 17).

Avançando para o EM, Becker (2009, p. 10) ao pesquisar sobre as habilidades e competências em relação a álgebra adquiridos de estudantes do 1º ano do EM quando estudaram o EF percebeu que "os estudantes tiveram muita dificuldade para estruturar formalmente a resolução dos problemas, utilizando pouquíssimas vezes abordagens algébricas, dando preferência pela resolução através de uma solução numérica". Fonseca (2016) ao trabalhar progressão aritmética com alunos de 2º ano do EM, apontou erros de cálculos na manipulação algébrica.

Esse quadro preocupante se estende também ao ensino superior. Irias *et al.* (2011) ao analisar avaliações da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I de estudantes de licenciatura em matemática verificaram alunos com dificuldades em conteúdos de matemática do EF e do EM, sobretudo relativos à manipulação algébrica. Já Cury e Bortoli (2011) ao pesquisarem 399 estudantes e disciplinas matemáticas do ensino superior perceberam que

> Há problemas com o conhecimento de entes algébricos, de suas operações e propriedades. Também há dificuldades em relação às atividades transformacionais ou baseadas em regras e na capacidade de abstração e generalização, haja vista a necessidade de substituir letras por números (CURY; BORTOLI, 2011).

Dessa forma, percebemos pelos autores supracitados, que os obstáculos de manipulação algébrica permeiam diferentes etapas de ensino seja no EF, no EM e chegando até mesmo no ensino superior. Tal contexto aponta para necessidade de pesquisas que busquem contornar e/ou amenizar as dificuldades elencadas.

No panorama geral de nossas análises das aulas 13 e 14 que buscaram a *definição do conteúdo* de escalonamento de SL com três equações e três incógnitas, podemos inferir que a maioria das equipes compreendeu a ideia e teve o entendimento do algoritmo resolutivo do escalonamento, o qual exige uma gama de conhecimentos prévios e técnicas algébricas estudadas na disciplina de matemática desde o EF. Assim como ocorreu na atividade 19 da aula 12, a atividade 20 mostrou que os alunos pesquisados tiveram dificuldades na execução de cálculos algébricos e aritméticos. Também contamos com algumas equipes fazendo o caminho

de resolução correto e, no momento de finalizarem o processo resolutivo, acabaram esquecendo ou se equivocando ao expressarem a solução ou a classificação do SL dado.

4.4 Eixo 4 – Análise da compreensão e desempenho dos alunos na resolução de novos problemas envolvendo SL

Esse eixo de análise diz respeito ao primeiro momento da etapa 4 de nossa organização de ensino envolvendo a *aplicação em novos problemas* conforme propõe Proença 2021. Foram analisadas as aulas 15 e 16 envolvendo a compreensão e desempenho dos alunos para resolverem novos problemas visando se ocorreu a "[...] *transferência da aprendizagem* pelos alunos do conceito matemático, bem como dos procedimentos algorítmicos estudados" (PROENÇA, 2021, p. 10, grifo do autor).

Buscando alcançar o objetivo para a análise desse eixo, serão tomados os áudios transcritos das aulas supracitadas, bem como a folha de atividades entregue ao professor com os problemas propostos resolvidos pelas equipes. Sobre tais problemas, analisamos os dados para mostrar o desempenho segundo o processo de resolução de problemas, ou seja, segundo as quatro etapas de RP (representação, planejamento, execução e monitoramento) apontadas por Proença (2018). A descrição das análises segue na próxima subseção.

4.4.1 Análise das aulas 15 e 16 – resolvendo novos problemas

As aulas 15 e 16 planejadas de nossa organização de ensino acabaram ocorrendo em 4 aulas de 50 minutos. Sendo 2 aulas realizadas no dia 30 de agosto de 2022 e 2 aulas no dia 01 de setembro de 2022. Dessas 4 aulas, participaram 33 alunos divididos em 15 equipes, sendo 12 duplas e 3 trios.

Em relação a abordagem da aula, o professor entregou as equipes a folha de atividades e solicitou que usassem os conteúdos abordados nas aulas anteriores para que resolvessem a atividade 21 (do Quadro 33) que continha 5 problemas do item *a* ao item *e*. Em relação ao início da resolução das atividades, nos 15 minutos iniciais da aula percebeu-se que apenas duas equipes conseguiram iniciar a resolução do item *a*, sendo que a maioria das equipes começaram a indagar o docente sobre o fato de nas aulas anteriores não terem sido trabalhados exemplos análogos aos apresentados na atividade 21. Os diálogos a seguir elucidam como se deu esse primeiro momento da aula:

A25: Professor, não consigo aqui.
P: Fala A25. Você não consegue? É um sisteminha.
A25: Você nunca passou um exercício desse. Pra gente fazer o sistema não.
P: Você não consegue transformar num sisteminha?
A25: Sim. Mas é bom ter um exemplo ali. Sabe de passos, sempre é bom ter um exemplo.

P: E aí, não sai?
A2: Sem exemplo não, eu acho que a gente tá querendo que você faça no quadro.
P: É? Nem a colega?
A30: Eu quero que você faça no quadro.

A19: Professor, dá pra fazer com x a a?
P: É pra transformar... Todos os exercícios você transforma em um sistema linear.
A19: Como transformar em um sistema?
P: Você acabou de estudar sistema linear. Então, você vai... Lembra quando a gente teve a situação 1 e a situação 2 lá do orçamento? Então. Você transformou eles em um sistema. Então a mesma coisa. Esses exercícios aí você vai transformar eles num sistema tá.

Pelos diálogos, verificamos a aluna A25 apontando ao professor pesquisador que nunca foi abordado um exercício igual ao solicitado na atividade. Já a dupla de alunas A2 e A30 demonstram terem desistido de fazer a atividade e pedem que o professor faça a resolução na lousa. Já o aluno A19 pergunta ao docente como transformar o problema dado em um SL. O docente lembra o aluno sobre as situações 1 e 2 vistas nas aulas 1 e 2 e que posteriormente foram transformadas em dois SL. Dentro desse aspecto, vemos que as equipes começaram a reconhecer as situações matemáticas apresentadas como um problema conforme preconiza Proença (2021, p. 10) apontando que "ao longo dessas aulas é possível que os alunos encontrem dificuldades ao buscarem uma solução às novas situações, sendo que as reconheçam como um problema". Outro aspecto que nos chama a atenção é que mesmo com a informação de que os problemas abordavam o conteúdo de SL (conhecimento esquemático), alguns alunos começaram a resolução usando a regra de três simples e a até mesmo o método da tentativa e erro:

P: E ai, consegue resolver o sisteminha ai?
A5: Complicado.
P: A9 e A5. Nada de sistema? Vocês tão fazendo por regra de três? Não é assim. Tentem fazer usando o conteúdo de sistema lineares que nós vimos nas aulas anteriores.

A35: Professor a gente fez por tentativa.
P: Vocês fizeram por tentativa e deu quanto?

A35: Oitenta.
P: Oitenta eu sei que vai dar, pois são 80 questões. Mais quantos acertos?
A35: Ah, não sei.
P: Tá errado. Se der 5 acertos. Cada acerto é vintão, dá 100 reais. Só que ele perde 10 reais de cada erro.
A35: 75.
P: 75. E quantos reais que ele vai perder? 750 tá. Então ele vai ganhar 100 e vai perder 750. Isso que tá errado, ele tem que ganhar 100.

Acima, vemos que os alunos A5 e A9 tentaram fazer o item *a* usando regra de três simples. Já a aluna A35 tentou fazer a atividade por tentativa e erro e, na verdade, teve dificuldades na etapa de **monitoramento** do problema, pois não percebeu que a resposta encontrada estava equivocada. Dentro desse contexto de entraves, após 20 minutos de aula, o professor pesquisador decidiu ir até a lousa e explanar de maneira dialogada a obtenção do SL do item *a*. Com a explicação e obtenção do SL com duas equações e duas incógnitas feitas nesse primeiro item, observou que a maioria das equipes conseguiram escrever e resolver os SL dos demais itens da atividade 21. As subseções seguintes trazem as inferências separadamente de cada item dessa atividade.

4.4.1.1 Análise da atividade 21-a – o problema da barraca de tiro

Conforme vimos na subseção anterior, as equipes investigadas tiveram dificuldades para iniciar a resolução da atividade 21. Para Mayer (1992) os **conhecimentos linguísticos, semânticos e esquemáticos** é que permitem que a pessoa encontre condições de compreensão e entendimento do problema, tendo como base a construção que fez de sua representação mental. Com essas ideias do autor, podemos ver que os entraves desses conhecimentos é que impediram que os alunos conseguissem iniciar a resolução do problema da barraca de tiro proposto pelo item a.

Em termos de dificuldades nesse item na qual os alunos não conseguiram iniciar a sua resolução, podemos inferir que os alunos não souberam fazer a tradução das informações presentes no enunciado por meio de uma representação tendo entraves em **conhecimentos linguísticos.** Verificamos também que as equipes participantes não lograram sucesso ao efetuar a tradução, reconhecimento dos significados e no estabelecimento das relações dos termos matemáticos presentes no texto tendo assim, obstáculos em **conhecimentos semânticos.** Dessa maneira, essas duas dificuldades iniciais não permitiram aos indivíduos pesquisados

identificarem o esquema do problema como tratando-se de SL, haja vista que com a etapa 3 os participantes já tinham obtido seus **conhecimentos esquemáticos** com relação a esse conteúdo. Outrossim, diante do impasse da resolução desse primeiro item, o professor auxiliou os estudantes na leitura do texto do problema e na escrita do SL concernente a ele.zs

Nesse panorama de dificuldades, Pradini e Winarsih (2020) ao investigarem uma turma de oitavo ano do EF da Indonésia na RP de SL do tipo 2x2, percebeu que os alunos apresentaram dificuldades ao transformar as informações relevantes em variáveis x e y. Além disso, os entraves concentravam-se na identificação dos termos matemáticos adequados para resolução do problema e, por fim, os estudantes não conseguir formular ELs equivalentes ao enunciado do problema. Os autores apontam que esses obstáculos podem ser causados devido ao uso de estratégias incorretas e baixa habilidade de compreensão de leitura que não permitem o estabelecimento de relações entre os componentes linguísticos e numéricos do problema.

Do mesmo modo, Wicaksono *et al.* (2020, p. 06, tradução nossa) ao pesquisarem a resolução de problemas de uma turma de 30 alunos da oitava turma do EF também da Indonésia relataram que os estudantes pesquisados **"**podiam entender o problema e podiam revelar o que é conhecido e o que é perguntado, mas tinham dúvidas em determinar as etapas que serão usadas na solução do problema". Os autores relatam ainda que os pesquisados se encontravam inseguros para continuar a resolução do problema. Nesse contexto, assim como ocorreu em nossa pesquisa, o papel de auxílio do professor foi essencial para contornar tais entraves.

Em um olhar em termos de construção do pensamento algébrico pelos alunos de nossa pesquisa no início da realização da atividade 21-a, podemos observar a luz de Ponte, Branco e Matos (2009) que os estudantes não foram capazes de obter êxito na competência de: **representar,** pois não lograram sucesso ao traduzir as informações do problema para a linguagem algébrica; **raciocinar,** nesse caso, os alunos não conseguiram relacionar, generalizar e deduzir que o problema proposto pela atividade tinha relação com um SL estudado nas etapas anteriores; e, **resolver problemas e modelar situações,** elucidada pelo fato dos investigados não usarem de seu conhecimento prévio para escreverem expressões algébricas e equações para resolverem a situação matemática que lhes foi conferida. Nesse sentido, Schwantes e Schwantes (2004) orientam que o uso de significados em cada situação problema trabalhada favorecem que os alunos desenvolvam a capacidade de expressar o pensamento algébrico. Morais (2012) corrobora com essa ideia, salientando que atividades com diferentes representações e estratégias de generalização também são precursores de melhorias no caminho de construção do pensamento algébrico. Por fim, Töman e Gökburun (2022) sugerem que um processo de

ensino aprendizagem com foco na transição entre a aritmética e álgebra podem contribuir no sentido de reconstrução de entraves como essas encontradas em nossa investigação.

Sobre o desempenho das equipes pesquisadas na resolução da atividade 21-a, o Quadro 57 traz a luz o desempenho dos estudantes em relação às etapas de RP propostas por Proença (2018). Nele ainda é apontado o SL esperado para a resolução da atividade, são descritas as estratégias adotadas para resolução, o procedimento matemático escolhido e se as equipes chegaram à solução final correta demandada pelo problema:

Quadro 57 - Desempenho das equipes na atividade 21-a.

SL esperado $\begin{cases} a + e = 80 \\ 20a - 10e = 100 \end{cases}$					
EQUIPES		**ETAPAS DE RP**		**OBSERVAÇÕES**	
Número	Participantes	Execução	Monitoramento	Estratégia e procedimento matemático	Solução Final
1	A1 e A23	☑	☑	SL + MA	☑
2	A2 e A30	☑	☑	SL + TC	☑
3	A3 e A17	☑	☑	SL + MA	☑
4	A4 e A21	☑	☑	SL + MA	☑
5	A5 e A9	☑	☑	TE	☑
6	A6, A20 e A27	☑	☑	SL + MA	☑
7	A7, A22 e A36	x	-	SL + MA	x
8	A8, A16 e A31	☑	☑	SL + MA	☑
9	A10 e A32	☑	☑	SL + MS	☑
10	A13 e A19	☑	☑	SL + MS	☑
11	A15 e A26	☑	☑	TE	☑
12	A18 e A40	x	-	TE	x
13	A24 e A29	☑	☑	SL + MA	☑
14	A25 e A39	☑	☑	SL + TC	☑
15	A28 e A35	x	-	SL + MA	x

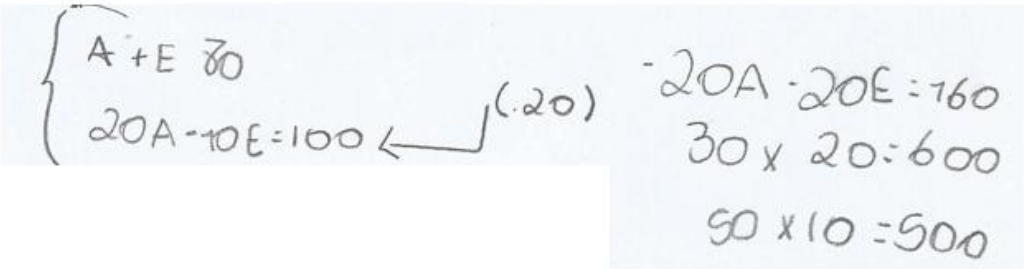
Legenda:
MA: Método da Adição; MS: Método da Substituição; TE: Tentativa e Erro; TC: Teorema de Cramer; ☑: Correta; x: Incorreta; -: Não concluída.
Fonte: Elaborado pelo autor

No Quadro 57, desconsideramos as etapas de representação e planejamento, pois tais etapas foram feitas pelo professor pesquisador durante a realização da aula diante das dificuldades iniciais encontradas pelos alunos e que apontamos na subseção anterior. Desse modo, para fins de análise consideramos apenas as etapas de **execução** e **monitoramento.**

No Quadro 57 também vemos que das 15 equipes participantes, 12 chegaram à resposta correta do item 21-a, obtendo êxito nas 4 etapas de RP e na solução final solicitada pelo enunciado. Também 12 equipes participantes adotaram a estratégia de escrever o SL e, em seguida, resolvê-lo por um dos procedimentos estudados nas aulas (método da adição, método

da substituição ou teorema de Cramer). Por outro lado, as equipes 7, 12 e 15 tiveram dificuldades na etapa de **execução** do problema, não conseguiram concluir os cálculos aritméticos e algébricos necessários nessa etapa e, com isso, não concluíram a resolução do problema proposto. Nesse sentido, não avaliamos a etapa de **monitoramento** dessas equipes para esse problema. Entre os procedimentos de resolução escolhidos para o SL, observamos que: 8 equipes adotaram a estratégia de escreverem o SL e usarem o método da adição, 2 utilizaram o SL e o método da substituição; 2 utilizaram o SL e o Teorema de Cramer; e 3 utilizaram a estratégia de tentativa e erro. A Figura 25 ilustra como se deu a dificuldade da equipe 15 ao resolver a atividade 21-a:

Figura 25 - Dificuldades da equipe 15 na resolução do item 21-a.



Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura acima, verificamos que a equipe 15 adotou a estratégia escrever o SL e optou pela resolução usando o método da adição. Buscando eliminar a incógnita A na segunda linha do SL, a equipe multiplicou a primeira equação por -20, obtendo a equação -20A-20E=160 quando o correto é -1600. A partir desse erro a equipe apresenta cálculos sem sentido 30x20=600 e 50x10=500 e não apresenta mais resoluções para o problema. Tal ocorrência aponta para dificuldades em **conhecimentos procedimentais** por parte dos alunos pesquisados.

Essas dificuldades com cálculos algébricos na resolução de equações também foram encontradas por Atteh *et al.* (2017) ao pesquisar 30 alunos de EM de uma escola privada em Gana. Buscando contornar esses obstáculos, os autores verificaram que mostrou "que o uso do modelo de equilíbrio (método da balança) no ensino e aprendizagem de equações lineares melhora a compreensão dos alunos sobre os princípios de resolução de equações lineares em uma variável" (ATTEH *et al*., 2017, p. 09). Sobre o sucesso do uso dessa abordagem no ensino de equações, Andrews e Öhman (2021), ao investigarem 12 alunos em Estocolmo na Suécia, observou que os alunos estavam familiarizados com as ELs, de modo que invocam

frequentemente o procedimento “faça o mesmo para ambos os lados”, indicando uma compreensão segura dos princípios de solução de ELs.

Num panorama geral, verificamos que a maioria dos investigados tomou posse de conhecimentos prévios adquiridos na etapa 3 de nossa organização de ensino como estratégias de resolução da atividade 21-a, tais como: método da adição, método da substituição e Teorema de Cramer. Ao adotarem essas estratégias conseguiram chegar à solução correta, mostrando a compreensão e entendimento dos métodos resolutivos de SL com duas equações e duas incógnitas abordados em aulas anteriores.

4.4.1.2 Análise da atividade 21-b – o problema da balança da farmácia

A atividade 21-b trazia um problema cuja resolução matemática tinha um SL com três equações e três incógnitas. Entretanto, as equações desse SL eram todas incompletas e poderiam ser feitas pelo método da substituição em detrimento ao método do escalonamento ou ao Teorema de Cramer. O Quadro 58 demonstra como se deu o desempenho dos estudantes na resolução desse problema:

Quadro 58 – Desempenho das equipes na atividade 21-b.

SL esperado

$$\begin{cases} x + y = 87 \\ x + z = 123 \\ y + z = 66 \end{cases}$$

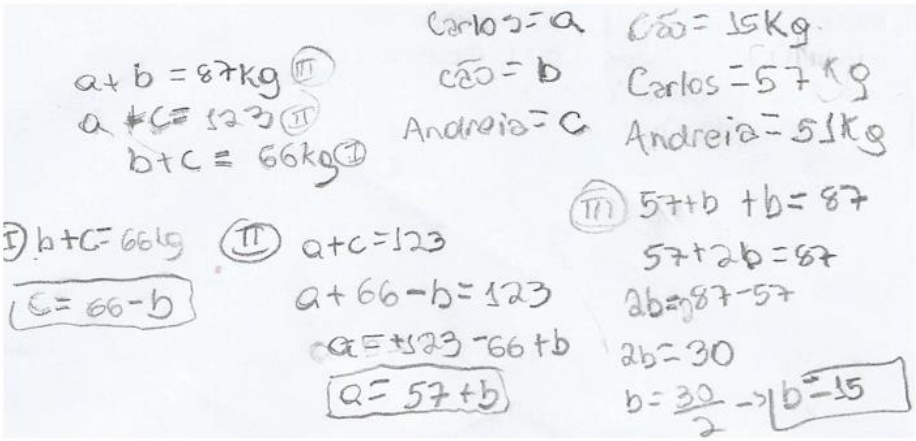
EQUIPES		**ETAPAS DE RP**				**OBSERVAÇÕES**	
Número	Participantes	Representação	Planejamento	Execução	Monitoramento	Estratégia e procedimento matemático	Solução Final
1	A1 e A23	✓	✓	✓	✓	SL + MS	✓
2	A2 e A30	✓	✓	✓	✓	SL + MS	✓
3	A3 e A17	✓	✓	x	x	SL + MS	x
4	A4 e A21	✓	✓	✓	✓	SL + MS	✓
5	A5 e A9	-	-	-	-	-	-
6	A6, A20 e A27	✓	✓	✓	✓	SL + MS	✓
7	A7, A22 e A36	✓	✓	✓	✓	SL + MS	✓
8	A8, A16 e A31	-	-	-	-	-	-
9	A10 e A32	✓	✓	✓	✓	SL + MS	✓
10	A13 e A19	✓	✓	x	x	SL + ME	x
11	A15 e A26	✓	✓	x	x	SL + TE	x
12	A18 e A40	-	-	-	-	-	-

13	A24 e A29	✓	✓	x	x	SL + MS	x
14	A25 e A39	✓	✓	✓	✓	SL + TC	✓
15	A28 e A35	✓	✓	✓	✓	SL + MS	✓

Legenda: MS: Método da Substituição; ME: Método do Escalonamento; TE: Tentativa e Erro; TC: Teorema de Cramer; ✓: Correta; x: Incorreta; - Não fez.
Fonte: Elaborado pelo autor

O Quadro 58 mostra que 8 equipes tiveram sucesso nas 4 etapas da resolução do problema e chegaram à solução correta do problema. Porém, as equipes 3, 10 e 11 deixaram de fazer o problema, sendo que as equipes 7 e 15 tiveram dificuldades nas etapas de **execução** e **monitoramento** alcançando assim uma resposta equivocada. A Figura 26 mostra essas dificuldades supracitadas na resolução do problema feito pela equipe 3:

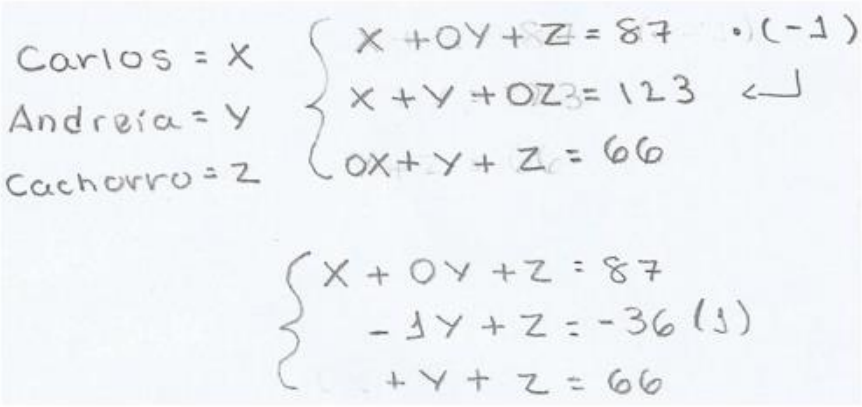
Figura 26 – Dificuldades da equipe 3 na atividade 21-b.



Fonte: Elaborada pelo autor

Vemos na Figura 26 que a equipe 3 realizou corretamente o método da substituição nas equações I, II e III, encontrado o peso correto de 15 kg para o cão. Porém, ao substituírem (mentalmente) esse valor nas equações I e II, apontaram erroneamente o peso de Carlos 57 kg e de Andréia 51 kg. Desse modo, tiveram dificuldades na etapa de **execução** por tiveram cálculos equivocados e na etapa de monitoramento por não se atentaram a resposta incorreta de acordo com o enunciado do problema, apontando para dificuldades de **conhecimentos procedimentais**. A Figura 27 traz a luz as dificuldades da equipe 10 na resolução da mesma atividade:

Figura 27 – Dificuldades da equipe 10 na atividade 21-b.



Fonte: Elaborada pelo autor

Dando prosseguimos, observamos na Figura 27 que a equipe 10 ao adotar a estratégia de resolução por escalonamento teve dificuldades de **conhecimentos procedimentais** na etapa de *execução* para resolver o problema. Os estudantes, ao eliminarem a variável x na segunda equação, colocaram o termo independente igual a -36 quando na verdade o valor correto seria +36. Dessa forma, toda a resolução seguinte se deu de forma errada e tal fato não foi notado pela equipe na etapa de **monitoramento.**

Essas dificuldades nas etapas de **execução e monitoramento** também foram verificadas por Fonseca (2016) e Almeida (2016) o que nos orienta para uma necessidade de uma melhoria no ensino das técnicas algébricas para resolução do problema proposto (etapa de **execução**) como também para orientar os estudantes a percorrerem a execução do cálculo realizado e compararem a resposta encontrada com a indagação do enunciado do problema (etapa de **monitoramento**). Do mesmo modo, Putri, Nasir e Maharani (2022) ao entrevistarem alunos do 8º ano do EF da Indonésia na RP de SL 2x2 verificaram dificuldades dos pesquisados ao analisar e concluir as etapas das estratégias a serem executadas (etapa de **execução)** e na revisão das respostas encontradas (etapa de **monitoramento)**. Além disso, alguns entrevistados apontaram que não tinham certeza de suas habilidades matemáticas na resolução dos problemas apresentados.

Em nosso estudo, no contexto de análise da resolução da atividade 21-b, mais uma vez encontramos que a maioria das equipes conseguiram a *transferência de aprendizagem* de conteúdos das etapas anteriores de nossa organização de ensino de modo a construírem a estratégia de resolução dos problemas propostos. Além disso, como aconteceu em algumas aulas da etapa anterior de *definição do conteúdo,* algumas equipes voltaram novamente a ter

dificuldades de **conhecimentos procedimentais.** Entretanto, tais equipes representam a minoria dos pesquisados e não nos inferem que as estratégias adotadas não eram aquelas abordadas em etapas anteriores da organização de ensino como método da substituição e escalonamento, por exemplo. Mas sim, em entraves de cálculos e algoritmos algébricos minuciosos que necessitam ser mais bem trabalhados pelos envolvidos.

4.4.1.3 Análise da atividade 21-c – o problema das vendas mensais

O problema 21-c já apresentava o SL com três equações e três incógnitas dado. Sendo que as equipes deveriam resolvê-lo pelo Teorema de Cramer ou pelo método do escalonamento de modo a acharem os valores de x, y e z. O Quadro 59 elucida sobre o desempenho dos alunos nessa atividade:

Quadro 59 - Desempenho das equipes na atividade 21-c.

Resposta esperada: *Produto: x.y.z = 6*							
EQUIPES		**ETAPAS DE RP**				**OBSERVAÇÕES**	
Número	Participantes	Representação	Planejamento	Execução	Monitoramento	Estratégia e procedimento matemático	Solução Final
1	A1 e A23	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
2	A2 e A30	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
3	A3 e A17	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
4	A4 e A21	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
5	A5 e A9	✓	✓	x	-	SL + ME	x
6	A6, A20 e A27	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
7	A7, A22 e A36	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
8	A8, A16 e A31	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
9	A10 e A32	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
10	A13 e A19	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
11	A15 e A26	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
12	A18 e A40	✓	✓	x	-	SL + ME	x
13	A24 e A29	✓	✓	✓	✓	SL + ME	✓
14	A25 e A39	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
15	A28 e A35	✓	✓	✓	x	SL + ME	x

Legenda:
ME: Método do Escalonamento; ✓: Correta; x: Incorreta.
Fonte: Elaborado pelo autor

Observamos que das 15 equipes participantes, 14 adotaram o método do escalonamento como estratégia de resolução. Nesse sentido, Rodríguez (2022) ao pesquisar alunos de EM de escolas do Chile, que participaram da RP equivalentes a SL, apontou que os estudantes preferiram as estratégias algébricas e gráficas como caminho para encontrarem a soluções de problemas propostos. Em relação a nossa pesquisa, constatamos que as equipes 1 a 4, 6 a 11, 14 e 15 desenvolveram sem dificuldades as três primeiras etapas de resolução de problemas **(representação, planejamento e execução),** porém falharam ao indicarem a resposta correta do problema com dificuldades na etapa de **monitoramento**. Os alunos acabaram expressando a solução do SL não se atentando para o fato que o comando do enunciado solicitava o produto das incógnitas, cuja resposta final seria x.y.z=1.2.3=6. Já as equipes 5 e 12 tiveram dificuldades de **conhecimentos procedimentais** e não conseguiram executar os algoritmos corretamente exigidos pelo método do escalonamento na etapa de **execução** do problema, apresentando cálculos equivocados já na parte inicial da resolução. Desse modo, a etapa de **monitoramento** dessas duas equipes não pôde ser avaliada.

Sobre os obstáculos nessa atividade, sobretudo na etapa de **monitoramento**, Roberts e Le Roux (2019) ao entrevistarem 15 estudantes do 8º e 9º anos do EF da África do Sul sobre a resolução de problemas envolvendo SL, percebeu que o discurso de dos investigados era ritualizado e caracterizado pela aplicação de regras aplicadas em manipulações algébricas. Sobre a etapa de monitoramento, os autores apontam que “para todos os alunos, o término do cálculo é a aparência da solução” (ROBERTS; LE ROUX, 2019, p. 13).

Dessa maneira, observamos que tais entraves precisam ser tratadas durante a resolução dos problemas propostos de modo que o estudante compreenda a necessidade de verificar a resposta encontrada de acordo com o enunciado da atividade dada. A próxima subseção, mostra a análise do item d da atividade 21.

4.4.1.4 Análise da atividade 21-d – o problema das infrações de trânsito

Essa atividade diz respeito a um SL com duas equações e duas incógnitas. Os alunos deveriam escrever o SL equivalente ao problema e resolver usando o método da adição ou da substituição vistos nas etapas 1 e 2 de nossa organização de ensino. Entretanto, o professor se deparou com a dupla de alunas A3 e A17 da equipe 3 tentando resolver a atividade por meio da estratégia de tabela usada pelos estudantes na etapa 1 para resolução das situações 1 e 2. O

diálogo abaixo mostra o professor se deparando com esse acontecimento e auxiliando as alunas a escreverem o SL do problema:

> *A3: Professor e aqui oh. Eu fiz a leve 3 e a média 4 na tabelinha.*
> *P: Por que tabelinha? É sistema de equações, você já sabe. [Por que] você quer fazer a estratégia de tabelas?*
> *A3: Ah... Não sei professor.*
> *P: Estratégia de tabela é quando a gente começou lá... Situação 1, situação 2 e você não sabia sistema linear. Ai não. Ai não.*
> *A3: Ah professor.*
> *P: Tá. Então vamos lá. Se eu somar a quantidade de multas. Quantas multas são?*
> *A3: São 17 pontos. 5 multas... 5 multas!!!*
> *P: 5 multas. Então se eu somar L mais M tem que dar quanto?*
> *A3: 17 ou 5?*
> *P: 5. Porque são 5 multas né. Aqui... É... 3 L é a pontuação né. Mais 4 multas médias, tem que dar quanto?*
> *A17: 17.*
> *P: E se eu somar L mais M, tem que dar quanto?*
> *A3: 5. Então, L mais M igual a 5.*
> *P: Isso.*
> *A3: 3L mais 4M igual a 17.*
> *P: Isso. Ai vocês resolvem da maneira que quiserem. É um sistema que tem 2 equações e 2 incógnitas. Ai você pode resolver da maneira que você quiser.*
> *A3: Por Cramer?*
> *P: Por Cramer, por escalonamento, método da adição, método da substituição.*
> *A3: Tá bom professor.*

Pelo diálogo, vemos que o docente auxilia as alunas a declinarem da ideia de usar tabela para resolução do problema proposto. Em seguida, dialogando com as estudantes o professor as auxilia na escrita do SL correspondente ao problema. Ato contínuo, vemos a aluna A3 questionar se poderia usar o Teorema de Cramer para resolvê-lo e o pesquisador aponta uma série de opções que a aluna poderia adotar para resolução. Nesse sentido, vemos que a dupla teve dificuldades na *transferência de aprendizagem* dos conteúdos abordados em aulas anteriores, percurso esse que foi mudado com a atuação do professor que atuou como direcionador do processo de ensino e aprendizagem que se dava naquele momento da aula.

Como ocorreu no item anterior, a maioria das equipes tiveram novamente dificuldades na etapa de *monitoramento.* Dessa vez, ao se calcular o número de multas leves e médias do infrator, o enunciado solicitava como resposta o valor da razão entre multas leves e médias. O Quadro 60 mostra como se deu o desempenho das equipes na resolução da atividade:

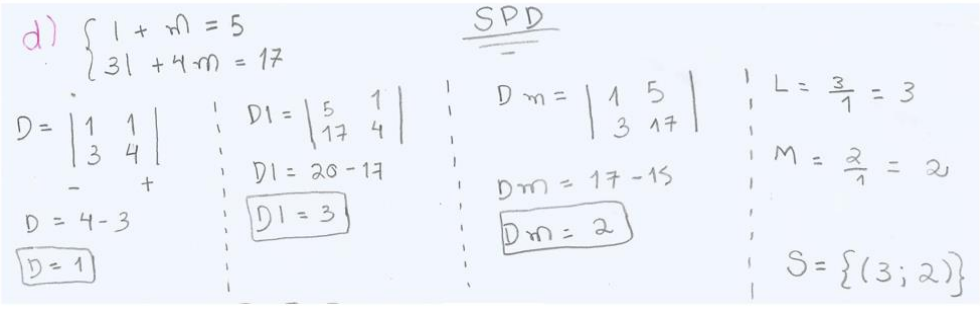
Quadro 60 - Desempenho das equipes na atividade 21-d.

SL e resposta esperada: $\begin{cases} L + M = 5 \\ 3L + 4M = 17 \end{cases} \quad e \quad \frac{L}{M} = \frac{3}{2}$							
EQUIPES		**ETAPAS DE RP**				**OBSERVAÇÕES**	
Número	Participantes	Representação	Planejamento	Execução	Monitoramento	Estratégia e procedimento matemático	Solução Final
1	A1 e A23	☑	☑	☑	☑	SL + MA	☑
2	A2 e A30	☑	☑	☑	x	SL + TC	x
3	A3 e A17	☑	☑	x	x	SL + MA	x
4	A4 e A21	☑	☑	☑	x	SL + MA	x
5	A5 e A9	☑	☑	☑	x	TE	x
6	A6, A20 e A27	☑	☑	☑	x	SL + MA	x
7	A7, A22 e A36	☑	☑	☑	x	SL + MA	x
8	A8, A16 e A31	-	-	-	-	-	-
9	A10 e A32	☑	☑	☑	☑	SL + MA	☑
10	A13 e A19	☑	☑	☑	☑	SL + MS	☑
11	A15 e A26	-	-	-	-	-	-
12	A18 e A40	☑	☑	☑	x	TE	x
13	A24 e A29	☑	☑	☑	☑	SL + MA	☑
14	A25 e A39	☑	☑	☑	x	SL + TC	x
15	A28 e A35	☑	☑	x	x	SL + MA	x

Legenda:
MA: Método da Adição; MS: Método da Substituição; TE: Tentativa e Erro; TC: Teorema de Cramer; ☑: Correta; x: Incorreta; - Não fez.
Fonte: Elaborado pelo autor

No Quadro 60 vemos que das 15 equipes investigadas, 11 adotaram a estratégia de escreverem o SL mais o uso do método da adição, substituição ou o do Teorema de Cramer. As equipes 5 e 12 usaram a estratégia de tentativa e erro e as duplas 8 e 11 declinaram de resolver a atividade. Percebemos que as equipes 1, 9, 10 e 13 resolveram o problema das infrações de trânsito corretamente, acertando inclusive a razão solicitada pelo enunciado. Porém, as equipes 2, 5, 6, 7, 12 e 14 efetuaram a resolução correta da quantidade de multas leves e médias, mas não calcularam a razão entre elas. Já as equipes 3 e 15 calcularam corretamente os valores solicitados, entretanto o cálculo da razão ao final foi feito de maneira incorreta. A Figura 28 a seguir, mostra a equipe 2 que adotou a estratégia e procedimento de execução SL+TC para resolver o problema proposto pelo item 21-d:

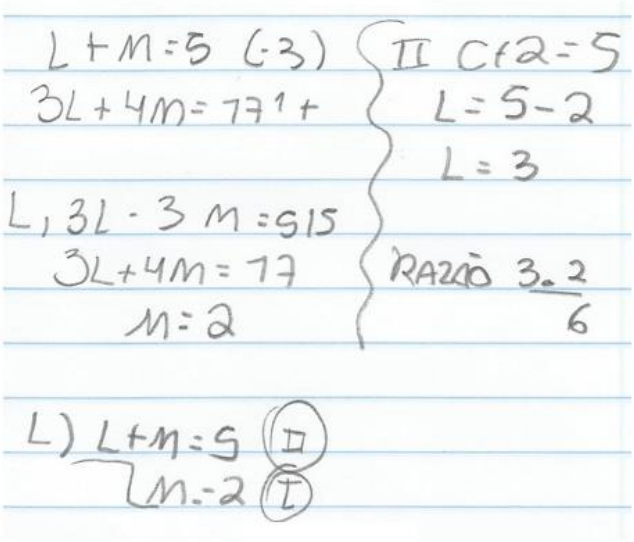
Figura 28 - Dificuldades da equipe 2 na resolução do item 21-d.



Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 28, percebemos que a equipe 2 escreveu corretamente o SL equivalente ao problema dado e adotou o procedimento de resolução pelo Teorema de Cramer. Desse modo, calculou corretamente os determinantes D, D_L e D_M e, em seguida as variáveis L e M logrando êxito na etapa de **execução** da resolução do problema. Porém, a equipe não se atentou na etapa de **monitoramento** ao fato de a resposta solicitada exigir a razão entre o número de multas leves e médias. A Figura 29 mostra o erro da equipe 15 que adotou a estratégia e procedimento de execução SL+MA para resolução do problema dado:

Figura 29 – Dificuldades da equipe 15 na atividade 21-d.



Fonte: Elaborada pelo autor

Vemos acima que a equipe 15 formado pelas alunas A28 e A35 não usaram as chaves para agrupar as equações do SL. Porém, resolveram corretamente o SL equivalente do problema

usando o método da adição. Ao final, se equivocaram no cálculo da razão e, ao invés de dividirem o valor da multa leve pelo valor da multa média, acabaram multiplicando os valores fazendo 3.2=6 e chegando a um valor errado. Isso aponta para dificuldades de **conhecimentos procedimentais** na etapa de **execução** do problema, o que impossibilitou os estudantes de chegarem à solução final correta.

Nesse contexto, Wiyah *et al.* (2021) ao analisar a RP equivalentes a SL com 3 equações e 3 incógnitas feitas por 33 alunos de EM da Indonésia percebeu uma série de dificuldades como: erros na identificação das informações conhecidas e solicitadas; erros na criação de modelos matemáticos, erros de cálculos; erros de organização de ELs com três variáveis; e, erros ao fornecer respostas válidas de acordo com o enunciado dos problemas. Como causas para esses obstáculos, os autores apontaram o tempo limitado para compreensão do problema, o descuido ao fazer cálculos, o esquecimento das fórmulas e falta de compreensão conceitual das variáveis. Dessa forma, assim como ocorreu na pesquisa dos autores supracitados, em nossa pesquisa vemos a necessidade de auxílio do professor na preparação e no momento da abordagem de ensino de modo a amenizar ou até mesmo extinguir os entraves apontados.

A próxima subseção dissertará sobre a análise do item e da atividade 21.

4.4.1.5 Análise da atividade 21-e – o problema dos tempos de uso do computador

Sobre essa atividade, que diz respeito a um SL com três equações e três incógnitas, vemos uma diferença em relação a problemas já feitos pelos estudantes em relação ao processo resolutivo, seja pelo Teorema de Cramer ou por escalonamento. As três equações do SL tinham variáveis no 2º membro das três equações. Tal fato necessitava de uma manipulação algébrica de modo a trazer todas as incógnitas das equações para o 1º membro, deixando apenas o termo independente no 2º membro. Só após esse processo é que os estudantes poderiam adotar o algoritmo de resolução que achassem mais adequado.

O início tarefa 21-e mostrou algumas equipes com dificuldades na etapa de *representação* do problema relacionadas a entraves nos **conhecimentos semânticos,** nos quais associavam equivocadamente o termo “excede” com a operação de multiplicação. O diálogo abaixo mostra o professor auxiliando uma equipe com essa dificuldade e dando outros encaminhamentos para o sucesso na resolução da atividade:

A6: Aqui na primeira equação, ficou x+z=2y professor?[Perguntando sobre a equação I do SL].
P: O tempo x mais o tempo de z excede o de y em 2. Então, excede quer dizer mais. Não é vezes 2. Então é y mais 2.
[Professor aguarda alguns segundos].
P: Então vamos na segunda equação aqui, a primeira você já arrumou lá?
A20: Sim.
P: O tempo de x, mais o quádruplo de z, beleza. É igual a 3 mais o dobro de y.
A20: Uhum.
P: Tá certo.
A20: Uhum.
P: Tá certo. Fechou. O último. O tempo de x mais 9 vezes o tempo de z excede o de 10. Vocês colocaram de novo lá né. Quando excede não é 10y. Quando excede é 10 mais y.
A20: Uhum.
P: Então apaga o 10y aqui tá bom.
A20: Uhum.
P: 10 mais y. Isso aqui é um y?
A20: Uhum.
P: É que tá meio invisível. Tá... Você tem que deixar esse sistema parecido com o da letra c lá.
A20: Uhum. E como faço esse sistema professor? Tem letra depois do sinal de igual.
P: Tem que deixar o termo independente sozinho depois do sinal de igual. Então você vai reorganizar esse sistema, passando o y antes do sinal de igual em todas as equações [explicando como proceder na primeira equação].
A20: Uhum.
P: Ai sim que você tem que fazer um escalonamento ou Cramer pra resolver. E agiliza ai porque você só tem 15 minutos.
A20: Tá bom professor. Obrigada.

Vemos no diálogo acima que o professor auxilia as alunas A6 e A20 a corrigirem o entendimento errôneo da palavra “excede” com a operação de multiplicação, alterando a expressão 2y para y+2 na equação I e 10y para y mais na equação III do SL. Em seguida, vemos que a aluna A20 demonstra ter compreensão em seu **conhecimento estratégico** sobre o conteúdo, ao perceber que as equações do SL tinham letras (variáveis) no 2º membro das equações. Desse modo, o professor as orienta as alunas como da maneira de procederem na equação I e deixando em aberto as demais equações para que encaminhassem a sua resolução, a qual aponta para usarem o escalonamento ou o Teorema de Cramer.

Em um olhar sobre o processo resolutivo da atividade 20-e, como aconteceu nos dois itens anteriores, algumas equipes não se atentaram para pergunta proposta no enunciado, calcularam corretamente os valores das incógnitas x, y e z e não determinaram a soma conforme pedia a pergunta do problema proposto. Dessa maneira, tiveram mais uma vez dificuldades na

etapa de *monitoramento* do problema. O Quadro 61 mostra como se deu o desempenho das equipes na resolução da tarefa aferida a eles nesse momento da aula:

Quadro 61 - Desempenho das equipes na atividade 21-e.

SL e resposta esperada:

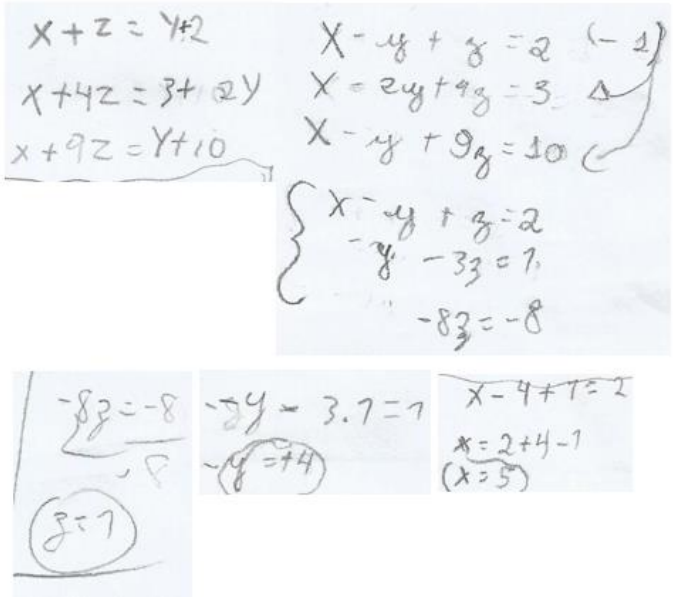
$$\begin{cases} x + z = y + 2 \\ x + 4z = 3 + 2y \\ x + 9z = y + 10 \end{cases} \quad e \quad x + y + z = 3 + 2 + 1 = 6$$

EQUIPES		ETAPAS DE RP				OBSERVAÇÕES	
Número	Participantes	Representação	Planejamento	Execução	Monitoramento	Estratégia e procedimento matemático	Solução Final
1	A1 e A23	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
2	A2 e A30	✓	✓	✓	✓	SL + ME	✓
3	A3 e A17	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
4	A4 e A21	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
5	A5 e A9	✓	✓	✓	✓	SL + ME	✓
6	A6, A20 e A27	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
7	A7, A22 e A36	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
8	A8, A16 e A31	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
9	A10 e A32	✓	✓	x	x	SL + ME	x
10	A13 e A19	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
11	A15 e A26	-	-	-	-	-	-
12	A18 e A40	✓	✓	✓	x	SL + ME	x
13	A24 e A29	✓	✓	✓	✓	SL + ME	✓
14	A25 e A39	✓	✓	✓	✓	SL + ME	✓
15	A28 e A35	✓	✓	✓	x	SL + ME	x

Legenda:
ME: Método do Escalonamento; ✓: Correta; x: Incorreta; - Não fez.
Fonte: Elaborado pelo autor

Por meio do Quadro 61, vemos que das 14 equipes que fizeram a atividade 21-e, todos adotaram a estratégia de escrever um SL e optaram por e resolvê-lo por meio do escalonamento. Já a equipe 11 optou por não resolver a atividade solicitada. Observa-se que as equipes 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12 e 15 tiveram êxito nas etapas de *representação, planejamento* e *execução* escrevendo o SL e resolvendo corretamente por meio do método do escalonamento. Entretanto, após a resolução do SL, não se atentaram ao fato de que a pergunta da atividade proposta requisita o valor da soma de x, y e z cujo resulto final era 6. Desse modo, esses alunos tiveram dificuldades na etapa de *monitoramento* do problema. A Figura 30 apresenta os obstáculos encontrados pela equipe 9 na etapa de **execução** do problema:

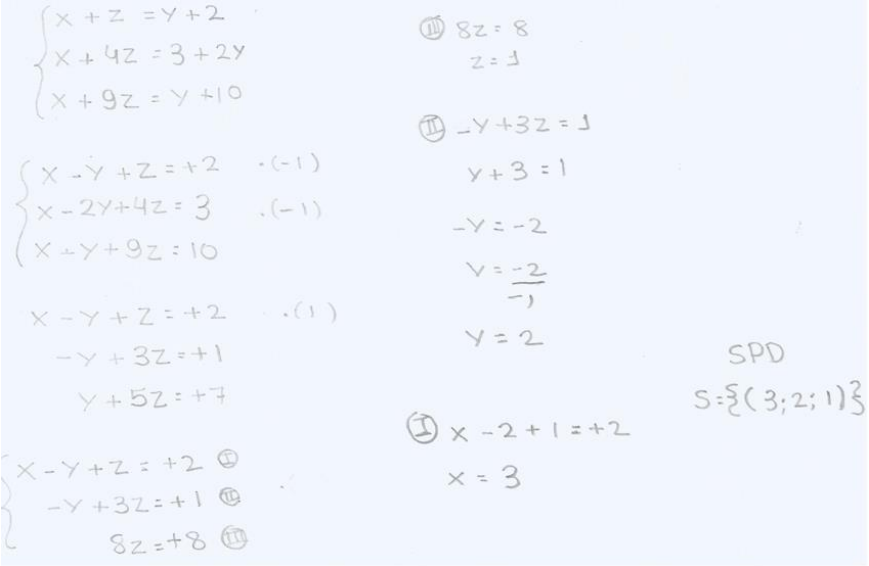
Figura 30 - Dificuldades da equipe 9 na etapa de execução da atividade 21-e.



Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 30 vemos que os alunos escrevem as três equações do SL corretamente, porém sem o uso de chaves. O procedimento algoritmo inicial do escalonamento também é feito com êxito. Na mesma Figura, observamos que a dupla calcula corretamente o valor de z na equação III. Todavia, ao calcularem o valor de y na equação 2, colocam -y – 3.1=1 sendo o correto -y + 3.1=1. Dessa forma, encontram valores errados para y e consequentemente para x na equação I do SL. Isso demanda obstáculos na ordem de **conhecimentos procedimentais** no momento de resolução da atividade requerida. Agora, a Figura 31 mostra a dificuldade da equipe 10 na etapa de **monitoramento** do problema, entrave essa encontrada de maneira similar pela maioria das equipes participantes na resolução da atividade 21-e:

Figura 31 - Dificuldades da equipe 10 na etapa de monitoramento da atividade 21-e.



Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 31 acima é possível observar que a equipe resolveu o escalonamento corretamente encontrando SL equivalentes, encontrando com sucesso os valores das variáveis e escrevendo a solução e classificação do SL escrito no início da resolução do problema. Entretanto, a equipe não verificou que a resposta correta para a atividade solicitava pedia o a soma das horas de utilização do computador pelos três amigos, resposta que deveria ser dada pela soma aritmética dos valores encontrados para cada incógnita. Já

De forma geral, observamos que a grande maioria das equipes participantes utilizaram de seus conhecimentos adquiridos nas etapas 2 e 3 de nossa organização de ensino para realizarem a resolução dos problemas solicitados pela atividade 21-e. Isso pode ser visto pelo fato de todos que fizeram, adotarem a estratégia de escreverem o SL equivalente ao problema e adotarem o método do escalonamento como caminho de resolução. Assim como aconteceu nos itens *c* e *d*, no item *e* os alunos investigados tiveram em sua maioria dificuldades na etapa de **monitoramento** do problema. Embora resolvessem com sucesso os SL escritos, não se atentavam que cada problema tinha uma pergunta diferente para a solução final a ser apresentada. Sousa e Proença (2019) perceberam alunos do 7º ano do EF com essas dificuldades na etapa *execução* do problema. Entretanto, verificaram equipes que diante dessas dificuldades monitoram os seus erros e corrigiam o percurso do processo resolutivo adotado. Em nossa pesquisa, um auxílio do professor pesquisador nesse sentido, incentivando os participantes a reverem a resolução percorrida e o questionamento proposto pelo enunciado poderia ter

melhorado o desempenho dos estudantes na resolução dos novos problemas propostos na etapa 4.

Finalizamos assim as análises do eixo 4, a próxima subseção dará prosseguimento a análise do eixo 5 que envolveu a avaliação escrita aplicada aos participantes.

4.5 Eixo 5 – Análise da compreensão e desempenho dos alunos relativos ao conteúdo de SL por meio de avaliação escrita

Por meio desse último eixo buscamos avaliar como se deu a compreensão, entendimento e desempenho das equipes participantes ao finalizarmos a etapa 4 de nossa proposta de organização de ensino por meio de uma avaliação escrita. Sobre esse momento, ele abrangeu as aulas 17 e 18 de nosso planejamento.

Dentro desse contexto, ao observar a grande demanda de tempo gasto pelos estudantes na resolução das atividades da etapa 3 e nas aulas 15 e 16 da etapa 4, o pesquisador decidiu dividir a avaliação propostas em 2 dias distintos. Dessa forma, a aula 17 com as atividades 22 e 23 (Quadros 34 e 35) aconteceu em duas aulas de 50 minutos no dia 06 de setembro de 2022. Já a segunda parte, com a aula 18 abordando a atividade 24 (Quadro 36) realizou-se também em duas aulas de 50 minutos no dia 08 de setembro de 2022. Com essa reorganização, o professor pesquisador avaliou que os alunos teriam mais tempo e poderiam resolver os novos problemas propostos sem pressão e com maior tranquilidade, mostrando o seu aprendizado de forma fidedigna, refletindo sobretudo em nossa análise de desempenho e compreensão que objetivamos para esse eixo.

Nas próximas subseções explicitaremos a análise das atividades inerentes a cada uma dessas aulas.

4.5.1 – Análise da aula 17 – avaliação dos conceitos aprendidos de SL

As atividades 22 e 23 da aula 17 buscavam avaliar o aprendizado dos alunos dentro da *formação conceitual* trabalhada na etapa 2 de nossa organização de ensino. Participaram da avaliação um total de 33 alunos divididos em 16 equipes, a saber: 13 duplas, 2 trios e um aluno de maneira individual.

Nesse contexto, avaliamos a compreensão e desempenho dos alunos concernentes aos apontamentos listados por Proença (2021) que dizem que os estudantes devem ser capazes de

> a) explorarem exemplos e não exemplos do conceito para explorar suas características; b) apresentarem uma definição para o conceito (construto mental), o que evidenciará as características do conceito que eles mencionam; c) apresentarem outros tipos ou variações do conceito, ou seja, apresentar exemplos do conceito; d) apresentarem não exemplos do conceito, o que permite ampliar a compreensão conceitual (PROENÇA, 2021, p. 09).

Assim, apontamos como se deu a resolução das equipes pesquisadas ao realizarem as atividades concernentes a esse processo.

4.5.1.1 – Análise da atividade 22 – avaliando conceitos de SL

A atividade 22-a tinha o comando "Escreva o que você entende por uma equação linear e dê 2 exemplos". Sobre o entendimento dos alunos para EL, consideramos as características listadas pelas equipes participantes da seguinte maneira:

Característica 1 – As variáveis de uma EL devem ter expoente 1

Característica 2 – Os coeficientes são números reais.

Característica 3 – As EL podem ter operações de adição e subtração entre os termos.

Característica 4 – As variáveis de uma EL não podem se multiplicar.

Característica 5 – As variáveis de uma EL não podem estar no denominador de uma fração.

Característica 6 – As EL podem usar letras diferentes em suas incógnitas.

O Quadro 62 abaixo mostra as características apontadas pelas equipes sobre o construto mental de EL e ainda se os exemplos listados por essas equipes estavam corretos.

Quadro 62 – Desempenho das equipes na atividade 22-a.

EQUIPES		**CARACTERÍSTICAS APONTADAS**						**EXEMPLOS LISTADOS**
Número	Participantes	C1	C2	C3	C4	C5	C6	
1	A1 e A23		✓	✓				✓
2	A2 e A30	✓	✓			✓		✓
3	A3 e A17	✓	✓		✓			-
4	A4 e A21	✓				✓	✓	x
5	A5 e A9	✓						✓

6	A6, A20 e A27	✓	✓	✓				✓
7	A7 e 35		✓					✓
8	A8 e A31	✓	✓					✓
9	A10 e A32	✓				✓		✓
10	A13 e A19	✓	✓	✓				✓
11	A15 e A26	✓	✓					✓
12	A18 e A40	✓	✓					✓
13	A22 e A36		✓		✓	✓		✓
14	A24 e A29			✓				✓
15	A25 e A39		✓					✓
16	A28	-	-	-	-	-	-	✓

Legenda:
✓: Correta; x: Incorreta; -: Não fez.
Fonte: Elaborado pelo autor

No Quadro 62 observamos que 10 e 11 equipes apontaram respectivamente as características 1 e 2 de uma EL. Já 4 equipes apontaram a característica 3, 2 a característica 4, 4 equipes a característica 5 e apenas 1 equipe apontou a característica 6. Quanto aos exemplos solicitados pelo enunciado, vemos que 14 equipes apresentaram exemplos corretos, sendo que a equipe 3 deixou de fazer tal atividade e a equipe 4 apresentou um SL ao invés de uma EL. Nesse panorama, vemos que as equipes foram capazes de apontar características importantes de seu construto mental para o conceito de EL. Ao compararmos as respostas do Quadro 62 com a Tabela 3 na qual os alunos fizeram os mesmos apontamentos sobre as características de uma EL, vemos que as principais características apontadas se mantiveram, trazendo a tona uma aprendizagem significativa dos conceitos trabalhados na etapa 2. Todavia, algumas equipes apresentaram respostas equivocadas na atividade 22-a, as quais listamos no Quadro 63 abaixo e apresentamos as explicações dos erros cometidos:

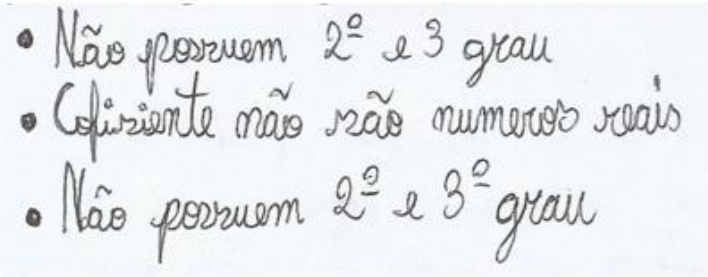
Quadro 63 - Dificuldades das equipes na atividade 22-a.

EQUIPES		**OBSERVAÇÕES**	
Número	***Participantes***	***Dificuldades***	***Explicação do erro***
1	A1 e A23	*- O expoente é variado e igual a 1.*	*- O expoente das variáveis de uma EL é sempre igual a 1.*
3	A3 e A17	*- Não possui fração com incógnitas*	*- Existem termos na EL com frações com incógnitas, porém apenas no numerador.*
5	A5 e A9	*- EL é toda equação do tipo ax+b=0.*	*- Essa é a definição de uma equação do 1º grau, não de uma EL.*
11	A15 e A26	*- É uma sentença verdadeira.*	*- Os alunos associaram a característica da solução de uma EL.*

Fonte: Elaborado pelo autor

Dando continuidade, a atividade 22-b cujo enunciado solicitava “Dê 2 exemplos de equações que não são lineares e justifique por que não são lineares”, 14 equipes apresentaram exemplos e justificativas corretas sobre equações que não eram lineares. Porém, as equipes 12 e 15 apresentaram dificuldades. A Figura 32 mostra as dificuldades encontradas pela equipe 12 ao responder essa atividade:

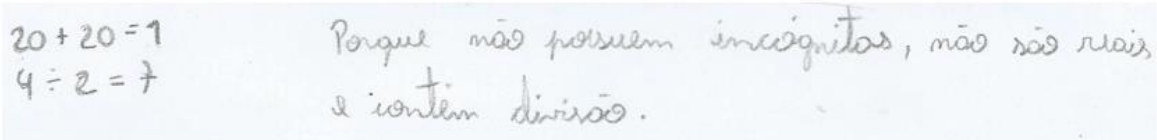
Figura 32 - Dificuldades da equipe 12 na atividade 22-b.



Fonte: Elaborada pelo autor

Pela Figura 32 acima vemos que a equipe 12 teve dificuldades ao ler o enunciado da atividade, tendo em vista que se solicitava que se escrevessem 2 exemplos com justificativa do porquê não eram EL. Mas os alunos escreveram de maneira equivocada as características de uma equação não linear, não apresentando exemplo algum. Agora, a Figura 33 aponta a dificuldade da equipe 15 ao responder atividade 22-b:

Figura 33 – Dificuldades da equipe 15 na atividade 22-b.



Fonte: Elaborada pelo autor

Já a equipe 15 apontou 2 sentenças matemáticas falsas ao invés de equações conforme solicitado pelo enunciado da atividade. Nesse sentido, os alunos escreveram que tais sentenças não seriam EL pelo fato de não possuírem incógnitas e não conterem divisão, respondendo assim de maneira errada a questão solicitada. Tal fato, aponta para obstáculos ao apontarem aspectos importantes sobre o conceito abordado. Dessa maneira, percebemos que essa equipe, conforme preconizam Klausmeier e Goodwin (1977) e Pozo (1998), não conseguiu elaborar

uma definição do significado do conceito, bem como, apresentar exemplos e não exemplos para o conceito de EL trabalhado na etapa 2.

Falando agora sobre a atividade 22-c cujo comando era “Escreva, com suas palavras o que é um sistema de equações lineares do tipo 2x2 e do tipo 3x3. Dê um exemplo de cada um deles”. Quanto ao desempenho nessa atividade, 9 equipes a fizeram de maneira completa e correta. Já as equipes 1, 5, 8, 9, 12 e 13 apresentaram a definição de SL 2x2 e 3x3 corretamente, mas ao darem exemplos não colocaram chaves para agrupar as equações de cada SL, mostrando dificuldades de **conhecimentos procedimentais.** A equipe 9 também se equivocou ao apontar um exemplo de SL 3x3 escrevendo com SL com 3 equações e somente 2 incógnitas.

O item *d*, último item da atividade 22 cujo pedido era “Explique de forma sucinta quais são as classificações que um sistema linear pode ter. Segundo o teorema de Cramer, quando um sistema linear é SPD?” apresentou várias equipes com dificuldades de entendimento do que era para ser realizado nessa tarefa. O Quadro 64 elucida esse acontecimento:

Quadro 64 - Dificuldades das equipes na atividade 22-d.

Dificuldades	Equipes
Apontaram as classificações SPD, SPI e SI mas não explicaram a quantidade de soluções de cada uma.	5, 9, 10, 11, 12, 13 e 16
Não respondeu o questionamento sobre o Teorema de Cramer	2, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 16
Escreveu um SL e resolveu	1

Fonte: Elaborado pelo autor

Vemos no Quadro 64 que das 16 equipes participantes, 7 deram as classificações corretas de um SL, mas não explicaram sobre a quantidade de soluções de cada classificação. Sobrepondo a esse fato, 11 equipes não responderam sobre o determinante D do Teorema de Cramer ser diferente de zero indicar um SL classificado como SPD. Além disso, tivemos a equipe 1 que ao invés de responder a indagação levantada acabou erroneamente escrevendo um SL como exemplo e resolvendo. Dessa maneira, vemos que para essa atividade, os participantes evidenciaram dificuldades na compreensão do enunciado da questão. Também acreditamos que o enunciado da atividade 22-d poderia ser reescrito de uma maneira mais clara e até mesmo criando-se um item *e* no qual poderia ser cobrado o questionamento referente ao Teorema de Cramer.

4.5.1.2 – Análise da atividade 23 – avaliando o reconhecimento de exemplos e não exemplos de problemas equivalentes a SL

Nessa subseção avaliamos a compreensão e desempenho da atividade 23 (disponível no Quadro 35) que dava um SL e requeria das equipes participantes que assinalassem entre 3 enunciados quais não eram problemas equivalentes ao SL dado, e justificar o motivo. Dentre os itens *a*, *b* e *c* citados, os itens *b* e *c* não eram equivalentes ao SL disposto pelo enunciado. O Quadro 65 traz a luz como se deu o desempenho dos estudantes na atividade 23:

Quadro 65 - Desempenho das equipes na atividade 23.

EQUIPES			
Número	*Participantes*	*Itens assinalados*	*Dificuldades*
1	A1 e A23	*b* e *c*	-
2	A2 e A30	*b* e *c*	-
3	A3 e A17	*b* e *c*	-
4	A4 e A21	*b* e *c*	-
5	A5 e A9	*a*	Marcaram o item *a*, invertendo o entendimento do enunciado.
6	A6, A20 e A27	*b* e *c*	-
7	A7 e 35	*b* e *c*	- No item b, justificaram que falta uma incógnita.
8	A8 e A31	*b* e *c*	- Justificativa incorreta no item c.
9	A10 e A32	*b* e *c*	- No item c justificaram que faltam letras na equação.
10	A13 e A19	*b* e *c*	-
11	A15 e A26	*c*	- Não assinalaram o item b.
12	A18 e A40	*b* e *c*	- Justificativa incorreta no item b. - Justificativa incorreta no item c.
13	A22 e A36	*b* e *c*	- Não justificaram o item c.
14	A24 e A29	*b* e *c*	-
15	A25 e A39	*b* e *c*	-
16	A28	*b* e *c*	- Não justificou o item b. - Não justificou o item c.

Fonte: Elaborado pelo autor

O Quadro 65 nos indica que das 16 equipes investigadas, 14 indicaram corretamente as alternativas *b* e *c* como não equivalentes ao SL dado pelo enunciado, verificando uma compreensão em que associam exemplos e não exemplos de problemas que se equivalem a um SL.

Todavia, apenas 8 equipes justificaram sem falhas o motivo de terem assinalado as alternativas corretas. No entanto, quando observamos a equipe 5 assinalou o item *a*, invertendo assim o comando dado pelo enunciado. Também a equipe 11 deixou de assinalar o item *b*. Sobre o item *c*, as equipes 7 e 9 citaram que o problema não é equivalente por falta de incógnitas ou

letras no SL, quando na verdade os materiais escolares é que mudam conforme as equações. Por fim, as equipes 8 e 12 tiveram justificativas errôneas sobre os itens assinalados.

4.5.2 – Análise da aula 18 – avaliação na resolução de novos problemas

A atividade 24 (disponibilizada no Quadro 36) buscou avaliar a compreensão e desempenho das equipes investigadas ao resolverem novos problemas em nossa organização de ensino. Dessa forma, nossa análise dessas tarefas conforme preconiza Proença (2021, p. 10) buscou "avaliar os alunos nas quatro etapas do processo de resolução" na qual verificamos as dificuldades no processo dessas quatro etapas, os entraves ao relacionarem contextos das situações e a identificação e representação do conceito de SL.

Conforme descrevemos anteriormente, a aula 18 ocorreu em 2 aulas de 50 minutos no dia 08 de setembro de 2022 e dessa vez, participaram 33 alunos, agora divididos em 15 equipes sendo 12 duplas e 3 trios. O Quadro 66 mostra como ficaram distribuídas as equipes para a aula 18:

Quadro 66 - Distribuição das equipes para a aula 18.

Número da Equipe	Participantes
1	A1 e A23
2	A2 e A30
3	A3 e A17
4	A4 e A21
5	A5 e A9
6	A6, A20 e A27
7	A7 e 35
8	A8, A16 e A31
9	A10 e A32
10	A13 e A19
11	A15 e A26
12	A18 e A40
13	A22, A28 e A36
14	A24 e A29
15	A25 e A39

Fonte: Elaborado pelo autor

A Tabela 5 traz em números, o desempenho das 15 equipes na resolução da atividade 24, apontando as estratégias e procedimentos matemáticos escolhidos e se fizeram a resolução de maneira correta, parcialmente correta ou incorreta:

Tabela 5 – Desempenho das equipes na resolução da atividade 24.

Atividade 24	**Estratégia e procedimento matemático**					**Desempenho na resolução das equipes que fizeram a atividade**		
Itens	SL + MS	SL + ME	SL + TC	TE	Não fez	C	P	I
a	1	10	2	2	0	15	0	0
b	0	11	3	1	1	12	2	0
c	0	12	2	0	1	8	6	0
d	0	14	0	1	0	10	4	1
e	2	10	1	1	1	9	5	0

Legenda:
MS: Método da Substituição; ME: Método do Escalonamento: TC: Teorema de Cramer; TE: Tentativa e Erro; C: Correta; C: Parcialmente Correta; I: Incorreta.
Fonte: Elaborada pelo autor

Um olhar sobre a Tabela 5 nos revela que a grande maioria das equipes adotaram como caminho de resolução dos itens da atividade 24 a estratégia de escreverem o SL e resolverem pelo método do escalonamento. Sendo em seguida, as escolhas pelo SL e execução pelo Teorema de Cramer as estratégias e procedimentos de execução mais adotadas. Esse panorama nos chama a atenção para a apropriação dos alunos dos conceitos e conteúdos concernentes a SL, abordados por nossa organização de ensino.

Falando sobre o desempenho da resolução, observamos mais uma vez que a maioria das equipes tiveram êxito e realizaram as atividades de forma correta, sendo 15 acertos no item *a*, 11 no item *b*, 8 no item *c*, 10 no item *d* e 10 no item *e*. Consideramos questões parcialmente corretas aquelas em que as equipes lograram êxito nas etapas de *representação* e *planejamento*, mas encontraram obstáculos nas etapas seguintes de *execução* e/ou *planejamento* da RP. Desse modo, apontamos resoluções parcialmente corretas, nas quais os alunos tiveram problemas principalmente na etapa de *execução* da RP apontando para dificuldades no sentido de **conhecimentos procedimentais.** O Quadro 67 detalha sobremaneira como ocorreram as dificuldades das equipes de alunos nas etapas de RP da atividade 24:

Quadro 67 - Dificuldades nas etapas de RP na atividade 24.

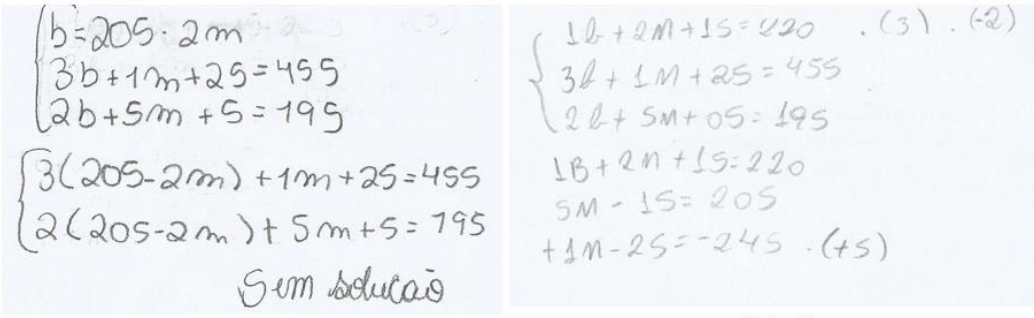
Itens	**Parcialmente Corretas**		**Incorretas**	
	ETAPAS DE RP		**ETAPAS DE RP**	
	Execução	*Monitoramento*	*Execução*	*Monitoramento*
a	-	-	-	-
b	- Montou o SL de forma incorreta (Equipe 7). - Não terminaram o escalonamento (Equipe 13).	-	-	-
c	- Erraram o escalonamento (Equipes 6, 7, 8, 11 e 13).	-	-	-

	- Erraram o cálculo de Dy (Equipe 15).			
d	- Erraram o escalonamento (Equipes 1, 5, 6 e 10).	- Erraram o método da tentativa e erro (Equipe 11).	-	- Não verificaram a resposta inadequada para o problema (Equipe 11).
e	Erraram o escalonamento (Equipes 4, 7, 8, 12 e 13).	-	-	-

Legenda:
"-": Significa que não houve dificuldade na etapa.
Fonte: Elaborado pelo autor

Quando observamos o Quadro 67, vemos que para o item *a* não houve dificuldades nas etapas de RP haja vista que todos os participantes fizeram de maneira completa e correta esse problema. Já no item *b* vemos que as equipes 7 e 13 tiveram dificuldades na etapa de **execução** do problema. Sendo que a primeira equipe escreveu o SL de forma incorreta e, além disso realizou o cálculo do escalonamento também de forma equivocada. Já a segunda equipe não terminou a execução desse procedimento matemático. A Figura 34 elucida ao leitor como se deram as dificuldades dessas duas equipes:

Figura 34 – Dificuldades das equipes na atividade 24-b.



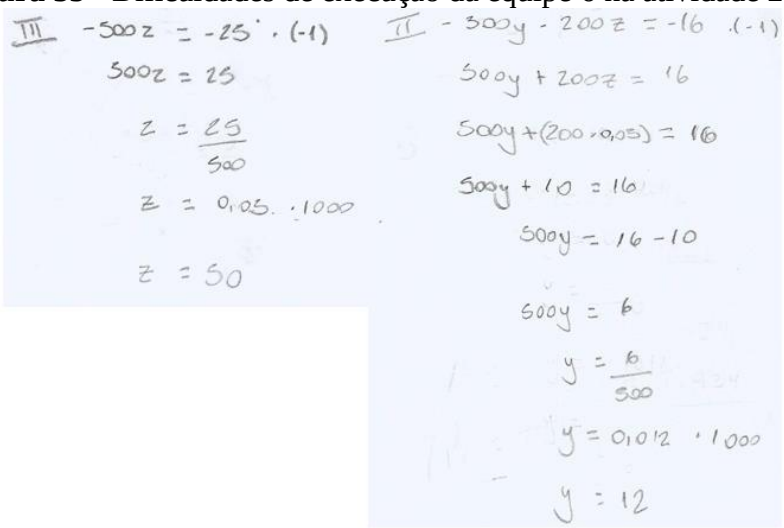
Equipe 7 Equipe 11

Fonte: Elaborada pelo autor

Vemos na Figura 34 que a equipe 7 escreveu o SL equivalente ao problema com a primeira e terceira linha de maneira incorreta. Além disso, tiveram dificuldades para fazer o escalonamento, misturando o método da substituição e apontando que SL não tinha solução. Já a equipe 11, escreveu corretamente o SL equivalente ao problema e realizou corretamente a primeira parte do escalonamento. Entretanto, essa equipe não finalizou a execução desse procedimento matemático de modo a encontrar os valores das variáveis x, y e z.

No Quadro 67 vimos que as equipes 6, 7, 8, 11, 13 e 15 tiveram dificuldades na etapa de *execução* para realizarem essa atividade. A Figura 35 traz a dificuldade da equipe 6 na realização da atividade 24-c:

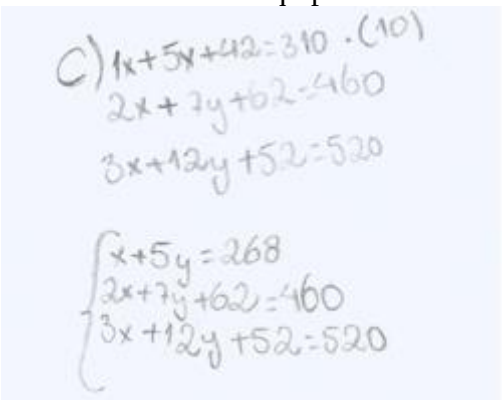
Figura 35 - Dificuldades de execução da equipe 6 na atividade 24-c.



Fonte: Elaborada pelo autor

Verificamos na Figura 35 que a equipe 6 ao realizar o escalonamento, calculou corretamente o valor de z=50. Mas ao realizarem o cálculo da incógnita y na equação II acabaram erroneamente dividindo o valor de z por 100 e colocando z=0,05. Nesse sentido de dificuldades, a Figura 36 mostra os obstáculos da equipe 13 na mesma atividade:

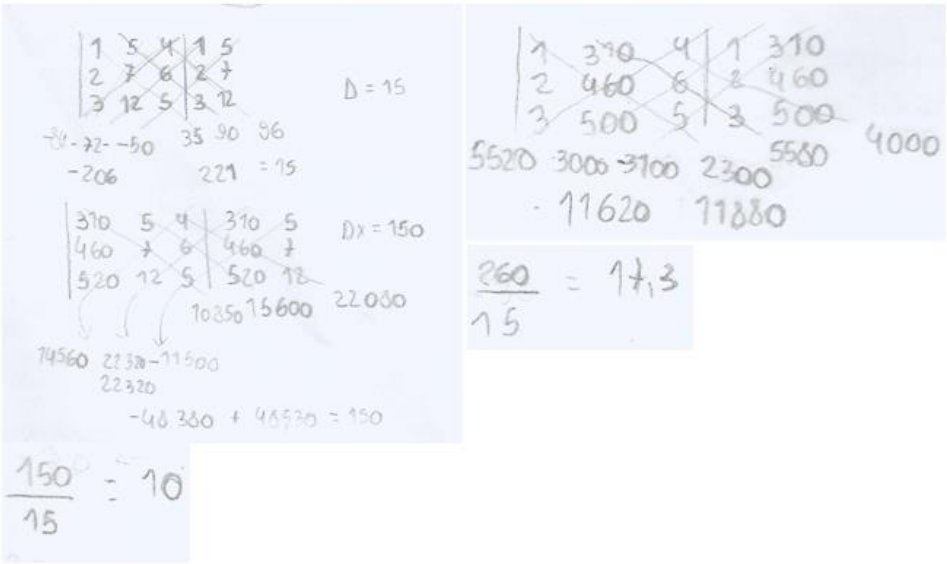
Figura 36 - Dificuldades da equipe 13 na atividade 24-c.



Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 36 vemos que a equipe 13 escreveu o SL equivalente ao sistema de forma correta em um primeiro momento e, após indicar uma multiplicação por 10 na equação I, reescreveram o SL equivalente de forma equivocada. Sobre tais dificuldades no escalonamento tanto pela equipe 6 quanto pela equipe 13, Amka (2020) ao pesquisar a RP abarcando SL 3x3 com estudantes do EM da Indonésia percebeu alunos com entraves no processo de execução do escalonamento, não conseguindo fazer substituições de variáveis e, desse modo, não conseguindo cumprir o plano de resolução estabelecido e resolver o problema de forma completa e correta. Ainda em relação aos obstáculos na atividade 24-c, a Figura 37 mostra esses ocorreram com relação a equipe 15:

Figura 37 - Dificuldades da equipe 15 na atividade 24-c.



Fonte: Elaborada pelo autor

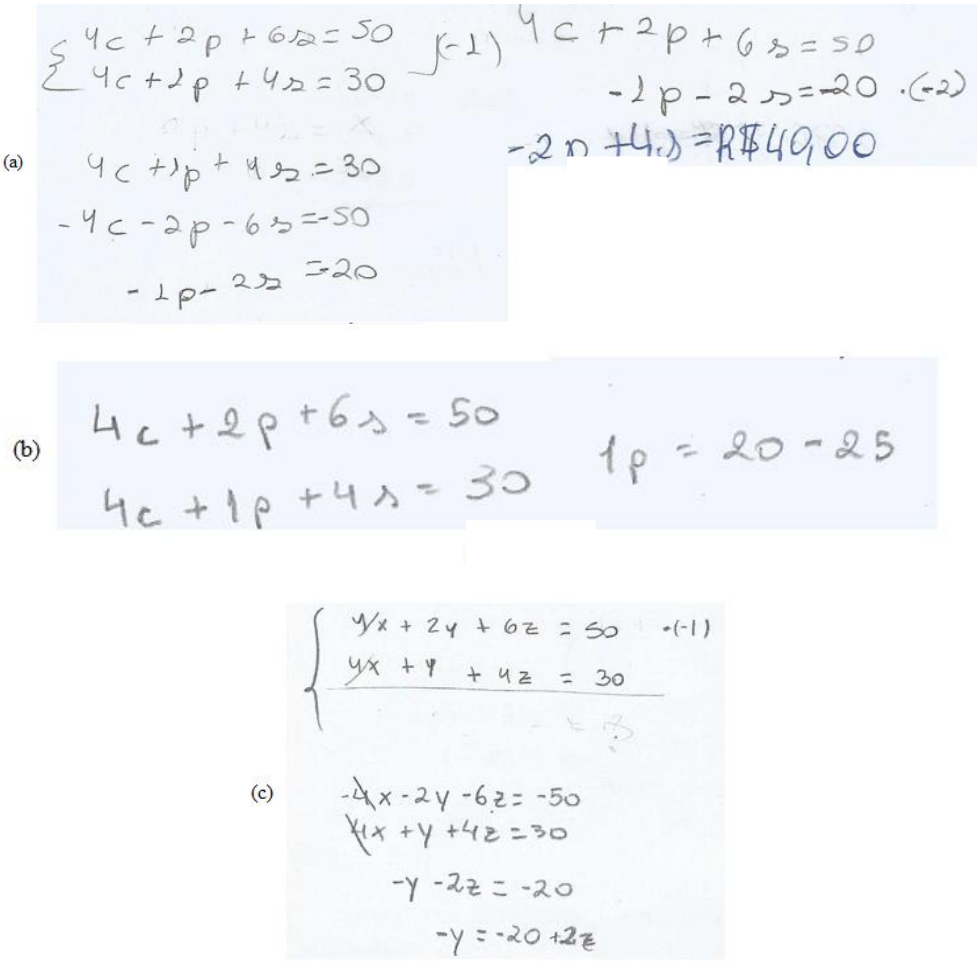
Por fim, a Figura 37 mostra que a equipe 15 ao realizar a resolução do SL por meio do Teorema de Cramer, calculou de maneira correta, os determinantes D e Dx, encontrando assim o valor certo de x=10. Por outro lado, ao calcularem o determinante Dy, erraram operações matemáticas de adição e multiplicação encontrando Dy=260 quando o correto era Dy=300. Dessa forma, a equipe também apresentou dificuldades na etapa de *execução* o que impediu de chegaram com sucesso a resposta correta para o problema apresentado.

Agora, em relação ao problema proposto no item *d* da atividade 24-d, esse além de conter informações supérfluas, tinha um SL equivalente cuja classificação era SPI. Dessa forma, durante a resolução por meio do método do escalonamento, os alunos encontrariam uma

EL que seria a resposta correta do problema que questionava o preço de “dois pastéis e 4 sucos”, ou seja, o valor 2p + 4s, sem ter a necessidade de terminar a execução desse processo algorítmico.

Na Tabela 5, observamos que 14 equipes optaram pela estratégia de escrever o SL e resolvê-lo usando o método do escalonamento e uma equipe escolheu o caminho estratégico da tentativa e erro. Dessa maneira, 10 equipes chegaram à resolução de forma correta e completa, 4 de forma parcialmente correta e uma equipe de maneira incorreta. Entre as dificuldades encontradas nesse processo, mais uma vez a etapa **execução** relativa a **conhecimentos procedimentais** foi a entrave que mais ocorreu. A Figura 38 elucida como se ocorreram tais obstáculos na resolução das equipes 1, 5 e 6:

Figura 38 - Dificuldades de execução das equipes 1, 5 e 6 na atividade 24-d.

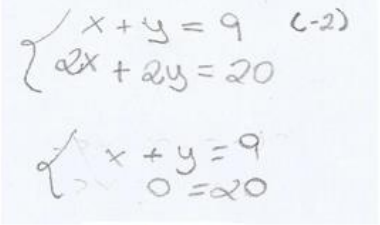


Fonte: Elaborada pelo autor

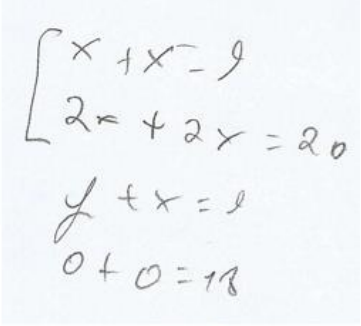
Vemos na Figura 38-a que a equipe 1 executou o escalonamento de forma correta até expressar a equação -2p+4s= 40, errando o sinal de -2p que era positivo, tendo assim um erro procedimental na etapa de *execução.* Agora na Figura 38-b verificamos a equipe 5 escrever corretamente o SL e anotar a equação 1p=20-2s, mostrando assim que não conseguiram começar o processo de escalonamento com entraves de **conhecimentos procedimentais.** E, finalmente e do mesmo modo, observamos na Figura 38-c que a equipe 6 após escalonar corretamente o SL inicial, não conseguiu dar prosseguimento à etapa de *execução* de modo a percorrer o caminho até a resposta solicitada pelo problema proposto.

Finalmente, chegamos ao item *e* da atividade 24, último tarefa proposta em nossa organização de ensino. Sobre essa atividade, é um problema cujo SL contava com 2 equações e 2 incógnitas sendo classificado como SI, ou seja, que não possuía solução. Na Tabela 5, verificamos que das 15 equipes que participaram da pesquisa na aula 18, 10 chegaram a uma solução correta e 4 parcialmente correta. Entre as equipes que tiveram dificuldades, de modo análogo aos itens anteriores, as dificuldades encontraram-se nos **conhecimentos procedimentais** concentrados na etapa de execução do problema. A Figura 39 mostra como se deram esses obstáculos:

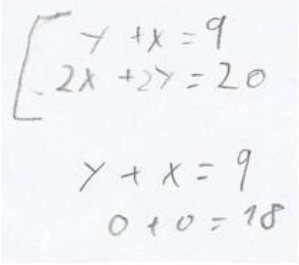
Figura 39 - Dificuldades na etapa de execução na atividade 24-e.



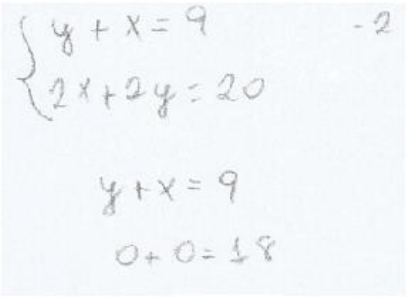
Equipe 4



Equipe 7



Equipe 12



Equipe 13

Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 39 acima evidencia-se as dificuldades das equipes na etapa de **execução** do problema. A equipe 1 encontrou a sentença matemática 0=20, já as equipes 7, 12 e 13 encontraram a sentença matemática 0=18. A sentença correta a ser alcançada era 0=2. Além disso, as equipes 7 e 12 usaram uma notação matemática com colchetes para agrupar as equações do SL, quando o correto é o uso de chaves. Um fato curioso, é que as equipes 7, 12 e 13, erraram o procedimento do escalonamento, mas encontraram sentenças matemáticas falsas, afirmando corretamente que se tratava de um SL impossível (SI). Entretanto esse fato não exclui o erro na etapa de **execução** da resolução do problema.

Sobre os obstáculos encontrados pelos estudantes na aula 18, o trabalho de Rakhmawati *et al.* (2019) investigou 30 alunos do EM da Indonésia na RP abarcando SL e encontrou: 3 alunos (10%) com desempenho excelente, 8 alunos (26,67%) com desempenho muito bom, 6 alunos (20%) com desempenho bom, 5 alunos (16,66%) com desempenho regular e 8 alunos (26,67%) com desempenho considerado como ruim. Sobre esses últimos, os autores apontam que os estudantes pesquisados disseram que nunca fizeram uma ilustração como estratégia para resolver problemas. Ainda sobre os estudantes com desempenho ruim, o estudo aponta que as dificuldades se concentraram ao identificar as informações dos dados conhecidos e solicitados (etapa de **representação)**, escolher as estratégias corretas (etapa de **planejamento)**, resolver os modelos matemáticos (etapa de **execução)** e verificar a veracidade (etapa de **monitoramento)**.

Num panorama geral da atividade 24, observamos erros provenientes de entraves de **conhecimentos procedimentais** observados na etapa de **execução** na resolução dos problemas propostas e já citados por nós anteriormente (SILVA, J. A., 2019; FREITAS; GUADAGNINI; 2013; BRUM; CURY, 2013; BECKER, 2009; FONSECA, 2016; IRIAS *et al.*, 2011; CURY; BORTOLI, 2011). Ainda nos deparamos com participantes com obstáculos na etapa de *monitoramento* do problema, no qual houve equipes que até resolveram corretamente o SL inerente ao problema, mas que não se atentaram em responder de maneira adequada a indagação proposta pelo enunciado conforme também observado por Akamine e Proença (2022).

Sobre o aspecto quantitativo da avaliação, essa teve valor 30 pontos em relação a pontuação trimestral a qual os estudantes estavam submetidos. Desse modo, a média aritmética das notas dos estudantes foi de 24,3 com desvio-padrão amostral de 5,6. Dessa forma, compreendemos um desempenho excelente da turma participante. A média exigida para avaliação era a nota 18 e apenas a equipe formada pelos alunos A15 e A26 tiraram nota 16 e necessitaram fazer a recuperação paralela obrigatória de conteúdos e de notas. Salientamos aqui, a dificuldades desses estudantes participantes que verificamos por diversas vezes em

nossas análises e a presença do professor pesquisador no auxílio de seus entraves durante toda organização de ensino.

4.6 Reflexões acerca dos resultados encontrados e das contribuições da organização de ensino

Por meio dos 5 eixos de análise dos resultados presentes em nossa investigação, podemos verificar que nossa pesquisa encontrou contribuições que convergem para o campo de ensino da álgebra e do pensamento algébrico, para o ensino do conteúdo de SL e para a abordagem de ensino por meio da RP. Nesse sentido, essas contribuições podem ser melhor entendidas quando olhamos para as quatro etapas de nossa organização a luz de nossos referenciais teóricos.

Inicialmente, analisando a etapa 1 de *uso do problema como ponto de partida*, observamos que 10 de 15 equipes adotaram a estratégia de tentativa e erro como caminho de resolução para a solução das situações 1 e 2 propostas para essa etapa. Nesse sentido, vemos a ausência da demanda **representar** do pensamento algébrico conforme sugerem Ponte, Branco e Matos (2009). Todavia, observamos por meio dos Quadros 38 e 39 que 14 equipes acertaram a resolução da situação 1 e 12 equipes a resolução da situação 2, tendo êxito nas quatro etapas (*representação, planejamento, execução* e *monitoramento)* da resolução de problemas. No entanto, duas equipes apresentaram dificuldades nas etapas de *execução* com entraves em **conhecimentos procedimentais** e de *monitoramento* no momento de resolução da situação 2 indicando obstáculos em **raciocinar** na construção do pensamento algébrico.

Avançando para a etapa 2 referente a *formação do conceito*, essa possibilitou aos alunos terem contato com conceitos de SL, abarcando a definição conceitual (construto mental desse conteúdo), a qual evidenciou o desenvolvimento da demanda **representar** do pensamento algébrico por meio da capacidade dos alunos pesquisados em apontar características, exemplos e não exemplos do conceito de SL nas atividades propostas.

Dando prosseguindo, a etapa 3 de *definição do conteúdo*, possibilitou aos investigados estabelecerem relações entre os conceitos estudados na etapa anterior com a definição formal e os processos algorítmicos inerentes a SL, o que culminou em uma melhoria no entendimento e compreensão do pensamento algébrico dos alunos na demanda **representar.** Porém, encontramos dificuldades dos alunos em manipulações algébricas com obstáculos em **conhecimentos procedimentais** no trabalho com os processos resolutivos de SL como o

Teorema de Cramer e do escalonamento apontando entraves na demanda **racionar** do pensamento algébrico preconizada por Ponte, Branco e Matos (2009).

Por último, a etapa 4 de *aplicação em novos problemas* revelou que a maioria das equipes pesquisadas adotou a estratégia de escrever um SL para a resolução dos problemas propostos, indicando um amadurecimento da demanda **representar** rumo à construção do pensamento algébrico. Nesse sentido, ainda observamos uma evolução das equipes nas demandas **raciocinar** e **resolver problemas** evidenciadas pela escolha dos alunos por um método de resolução algébrico (Método da Adição, Método da Substituição, Teorema de Cramer ou escalonamento) de modo a resolver os SLs escritos.

Nessa perspectiva, em relação a entraves relacionados a construção do pensamento algébrico indicados por nossos referenciais teóricos, nossa pesquisa avançou no sentido de possibilitar a compreensão e a capacidade dos estudantes de estruturar formalmente a resolução de um problema criando um ambiente de aprendizagem significativa, com atividades em grupos, permitindo o uso de diferentes estratégias e representações conforme demandam os estudos de Silva (2016), Becher (2009) e Morais (2009).

Nesse panorama, acreditamos ainda que obstáculos enfrentados por alunos como os de transição entre a linguagem natural para linguagem algébrica conforme apontaram trabalhos como de Töman e Gökburun (2022) e de Cury e Bortoli (2011) puderam ser reconstruídos por meio da etapa de *formação conceitual.* Ao nosso ver, tal etapa possibilitou o entendimento e a compreensão entre a linguagem escrita, a linguagem algébrica e os processos algorítmicos inerentes ao conteúdo de SL nas etapas posteriores (de *definição do conteúdo* e de *aplicação em novos problemas).* Esse último fato, também vem de encontro a reconstrução de obstáculos apontados pelos trabalhos de Souza (2019) e Chinnappan (2004), que indicaram alunos com dificuldades em estratégias procedimentais devido a não apropriação de conhecimentos conceituais da álgebra e sobretudo de SL.

Do mesmo modo, as atividades desenvolvidas por nossa organização de ensino permitiram contornar entraves apontadas no ensino de SL, tais como: o ensino baseado em técnicas algébricas, presos a livros didáticos e sem contextualização (BORGES, 2018) e, o trabalho fragmentado em sala de aula (KUHN; LIMA, 2018). Acreditamos que a reconstrução desses obstáculos foi possível devido ao fato de nossa metodologia de ensino permitir em sua estrutura entrelaçada a abordagem inicial do ensino *via* RP, passando pela abordagem conceitual de SL, pela definição formal desse conteúdo e chegando à resolução de problemas de diversas áreas do cotidiano vivenciada pelos estudantes.

Semelhantemente, sobre dificuldades apontadas por autores internacionais relativas ao ensino de SL, observamos que o trabalho realizado na etapa 2 *(formação do conceito)* cujas análises de bons resultados vislumbramos nas tabelas 3 e 4 e nos Quadros 40 a 46, possibilitou amenizar entraves de identificação conceitual de SL, obstáculos como esses verificados no estudo de Oktaç (2018). Em um olhar sobre a etapa de *formação do conceito* antecedendo a etapa de *definição do conteúdo*, vemos que este fato possibilitou potencializar a construção de relações entre conhecimentos conceituais e os algoritmos na RP que tinham entraves investigadas pelo trabalho de Dewi *et al.* (2021). De modo análogo, essas duas etapas citadas permitiram aos estudantes chegarem à etapa 4 de *aplicação em novos problemas* com um conhecimento conceitual e procedimental de SL mais elaborados, possibilitando a adoção de diferentes estratégias para RP, diferentemente dos entraves apontados por Maharani (2020) e Chinnappan (2004).

Entretanto, as análises dos eixos 3, 4 e 5 revelaram um cenário de dificuldades de ensino de SL na etapa de *execução* para RP com entraves em **conhecimentos procedimentais**, oriundos sobretudo da necessidade de realizarem manipulações algébricas em equações, escalonamentos e no uso do Teorema de Cramer. Além disso, houveram obstáculos na etapa de *monitoramento* da RP, quando os investigados deixavam de rever o caminho de resolução percorrido e a solução do problema apresentado. Esses obstáculos, ao nosso ver indicam a necessidade ainda presente de um avanço maior nas demandas de **racionar** e **resolver problemas** inerentes a construção do pensamento algébrico. Todas essas dificuldades necessitam ser melhor investigadas de modo a serem revistas e reconstruídas no âmbito do ensino da álgebra, sobretudo no campo do conteúdo de SL.

CONCLUSÕES

Essa tese teve por objetivo responder à questão de pesquisa: *Que contribuições a partir de uma organização de ensino por meio da resolução de problemas são identificadas na aprendizagem do conteúdo de sistemas lineares com estudantes do 2º ano do Ensino Médio?*

Para tanto, nossa investigação se pautou na organização de ensino por meio da RP proposta por Proença (2021) pautada nas etapas de: 1) Uso do problema como ponto de partida; 2) Formação do conceito; 3) Definição do conteúdo; e, 4) Aplicação em novos problemas. Dessa forma, a análise de nosso estudo se baseou em cinco eixos atrelados aos objetivos específicos e as quatro etapas supracitadas.

O nosso primeiro objetivo específico estava pautado na **análise da compreensão e desempenho dos alunos na etapa do uso do problema como ponto de partida para introduzir o conteúdo de SL.** Nesse sentido, a análise desse objetivo concernente ao eixo 1 de análise, envolveu as aulas 1 a 4 de nossa organização de ensino, nas quais foram trabalhadas as situações 1 e 2 e as cinco ações da abordagem de EAMvRP, preconizadas por Proença (2018). Dentro desse contexto, verificamos que as equipes participantes encontraram mais dificuldades na situação 1 (cuja natureza envolvia um SL de duas equações e duas incógnitas) do que na situação 2 (concernente a um SL escalonado com três equações e três incógnitas). Entretanto, vimos um ótimo desempenho dos alunos com 14 de 15 equipes acertando a resolução da situação 1 e 12 de 15 equipes com êxito na resolução da situação 2.

Nas aulas 1 e 2, na ação de *auxílio aos alunos durante a resolução do problema*, os áudios transcritos mostraram que alguns participantes tiveram dificuldades de leitura e intepretação do enunciado dos problemas propostos nas etapas de *representação* do problema (com entraves de **conhecimentos linguísticos e semânticos).** Observamos também equipes que mostraram dificuldades na etapa de **planejamento** com dificuldades em **conhecimentos estratégicos,** na qual não sabiam qual estratégia adotar para resolução do problema**.** Nesse sentido, também observamos equipes que tiveram obstáculos em seus **conhecimentos procedimentais** na etapa de **execução** do problema da situação 1, o que as motivou a voltarem novamente a etapa de **planejamento** e traçarem novas estratégias de resolução.

Nas aulas 3 e 4, poucas equipes aceitaram participar da exposição na lousa na ação de *discussão das estratégias dos alunos*. Mesmo assim, percebemos nas discussões que os alunos puderam mostrar sobremaneira o êxito nas etapas de resolução de problemas e o uso adequado de seus **conhecimentos linguísticos, semânticos, esquemáticos e procedimentais** para chegar

com sucesso a resposta das situações matemáticas propostas. Por outro lado, vimos que a estratégia mais usada para resolução das situações 1 e 2 foi a tentativa e erro, com 73% de uso dessa para a situação 1 e 66,7% para a situação 2. Isso demonstra uma dificuldade dos alunos em realizar a transposição de problemas naturais para a forma algébrica, preferindo assim o uso da aritmética para sua resolução.

Sobre a ação de *articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo*, no tocante a situação 1, percebemos que o professor pesquisador adotou a estratégia de tabela usada por uma equipe para articular ao conteúdo de SL com duas equações e duas incógnitas. Já para a situação 2, o professor escreveu o SL de forma direta para articular o conteúdo de SL com três equações e três incógnitas. Esse fato ocorreu tendo em vista que a maioria das equipes resolveu por tentativa e erro e nenhuma equipe quis apresentar sua resolução na lousa. Nesse contexto, nessa última ação, percebemos que os participantes não quiseram participar ativamente do momento, haja vista os poucos diálogos encontrados nas transcrições de áudio.

Já o nosso segundo objetivo específico pautado **na análise da compreensão e desempenho dos alunos na etapa de formação do conceito de SL,** atrelado ao nosso eixo 2 de análise, procurou verificar a compreensão e o desempenho dos alunos na *formação do conceito* de SL inerentes à segunda etapa de nossa organização de ensino abrangendo as aulas 5 e 6. Nessas aulas, solicitou-se que os participantes respondessem as atividades 1 a 8 que tratavam dos conceitos de EL, SL e suas soluções. Sobre o desempenho, verificamos que os estudantes conseguiram sobremaneira escrever uma definição (construto mental) para os conceitos abordados. A formação do conceito ficou ainda mais evidente quando, nas atividades, os investigados puderam apontar de maneira correta características, exemplos e não exemplos dos conceitos de equação linear e, sobretudo, de sistema linear, dando significado ao processo de aprendizagem, ampliando seu entendimento e sua compreensão conceitual.

O terceiro objetivo específico corresponde **à análise da compreensão e desempenho dos estudantes na etapa de definição do conteúdo de SL,** vinculado ao eixo 3 de análise, que abarcou as aulas 7 a 14 e as atividades 9 a 20 de nossa organização de ensino. Nessas aulas, o professor pesquisador buscou estabelecer as relações entre a linguagem matemática de SL com a linguagem matemática usada nas aulas anteriores da etapa *formação do conceito*. Nesse sentido, verificamos que os conhecimentos de compreensão conceitual trazidos previamente foram de grande valia para que as equipes participantes compreendessem as definições matemáticas e algoritmos concernentes ao conteúdo de SL.

O que nos chamou a atenção durante a realização das atividades 9 a 20 foi que apesar de a grande maioria das equipes participantes compreenderam o método resolutivo empregado em SL, os erros de **conhecimentos procedimentais** em manipulações algébricas foi presente em quase todas as atividades realizadas (atividades 9, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 19 e 20). Tais dificuldades ocorreram principalmente ao se trabalhar o Teorema de Cramer e o Escalonamento na resolução de SL com três equações e três incógnitas.

Sobre esse fato, acreditamos que a melhoria do ensino de álgebra relativa a manipulações algébricas deve ser melhorada, quando ela começa a ser ensinada já no EF. Assim, quando o aluno chegar ao EM e ao ensino superior terá amenizada a quantidade de dificuldades encontradas ao se deparar com novos conceitos/conteúdos/assuntos matemáticos que requerem conhecimentos prévios de álgebra estudados lá no EF. Isso passa pelo trabalho de abordagens de ensino como as que utilizam a RP, tanto na formação inicial quanto na formação continuada de docentes da educação básica, como também em pesquisas que propõem e/ou implementam novas abordagens que possam amenizar esse quadro preocupante de entraves de **conhecimentos procedimentais** na álgebra.

O quarto objetivo específico inerente **a análise da compreensão e desempenho dos alunos na etapa de aplicação de novos problemas envolvendo SL** estava atrelado ao eixo 4 de análise. Desse modo, esse objetivo envolveu o primeiro momento da etapa de *aplicação em novos problemas* na qual os alunos resolveram a atividade 21 nas aulas 15 e 16. No início dessas aulas, um fato que nos chamou a atenção foi que mesmo após os alunos terem contato com a formação conceitual (etapa 2) e definição de conteúdo (etapa 3) inerentes a SL, os alunos investigados demonstraram inicialmente grandes dificuldades de modo a usaram tais conhecimentos na resolução do item “a)” da atividade 20.

Sobre o item supracitado, observamos que já nesse primeiro problema apresentado os estudantes não conseguiram visualizar um SL equivalente a ele. Nesse sentido, em nossa pesquisa, a intervenção do professor ao perceber os obstáculos dos alunos passados 20 minutos de aula, indo até a lousa, discutindo com os estudantes e escrevendo o SL relativo ao problema do item 21-a foi um divisor de águas para que os alunos compreendessem como poderiam adotar a estratégia de escrever um SL para resolução de cada um dos cinco problemas da atividade 21.

Em relação às dificuldades de resolução do item 20-a, percebemos que elas ocorreram tanto no uso de **conhecimentos linguísticos** para traduzir as informações presentes no texto para uma representação mental, e no uso de **conhecimentos semânticos** ao reconhecer os

termos matemáticos e suas relações, quanto **conhecimentos estratégicos** (gerar, planejar e monitorar um caminho para solução). Esses entraves não permitiram que as equipes participantes chegassem a uma estratégia de modo a resolverem o problema proposto. Em um olhar sobre nossa organização de ensino, acreditamos que esses obstáculos poderiam ser contornados se durante o momento da aula o docente tivesse buscado envolver os alunos na resolução do problema de modo a revelar quais termos do enunciado causaram dificuldades para que eles pudessem converter a linguagem escrita para a linguagem algébrica de ELs e, em seguida, para SL.

Na resolução da atividade 21, vimos que a maioria dos participantes a fizeram maneira correta ou parcialmente correta, escrevendo com sucesso o SL equivalente ao problema proposto e resolvendo-o adequadamente. Nessa atividade, ocorrem entraves na etapa de *execução* **(conhecimentos procedimentais)** e de *monitoramento*. Sobre as dificuldades de execução, como já ocorreu na etapa 3, elas se concentraram em erros em manipulações algébricas em métodos resolutivos de SL como o Teorema de Cramer e o escalonamento. Já os obstáculos da etapa de *monitoramento* concentraram-se sobremaneira nos itens 21-c e 21-d sobre o fato dos alunos escreverem o SL e o resolverem corretamente, mas não se atentarem a pergunta proposta pelo enunciado do problema que no item 21-c perguntava sobre o produto das vendas dos três vendedores e, no item 21-d para a razão entre multas leves e médias. Como isso ocorreu na atividade 21, o docente percebeu a dificuldade e começou a chamar a atenção dos alunos na resolução de problemas das aulas posteriores.

Finalmente, o quinto e último objetivo específico inerente **a análise da compreensão e desempenho no uso do conteúdo de SL na resolução de problemas na avaliação escrita**, vinculado ao eixo 5, envolveu o segundo momento da etapa 4 de *aplicação em novos problemas*. Nesse momento, participaram 15 equipes que resolveram as atividades 22, 23, e 24 nas aulas 17 e 18.

Em relação às atividades 22 e 23, que exigiam dos alunos seus conhecimentos construídos relativos a conceitos abordados na etapa de *formação do conteúdo*, percebemos que a grande maioria dos indivíduos pesquisados apontaram características e exemplos corretos de uma EL e de um SL na atividade 22. Na atividade 23, constatamos que a maioria dos investigados assinalaram e justificaram corretamente as atividades, cujos enunciados eram equivalentes ao SL dado. Dessa maneira, verificamos que os alunos foram capazes de apontar uma definição (construto mental) nas atividades propostas. Além disso, puderam descrever

características, exemplos e não exemplos, verificar tipos e variações do conceito, mostrando ampliação do entendimento e compreensão conceitual por meio da prova escrita.

Sobre a atividade 24, última atividade proposta por nossa organização de ensino, assim como ocorreu nos eixos de análise 3 e 4, novamente as maiores dificuldades encontradas foram verificadas na etapa de *execução* do problema e apontaram, mais uma vez, entraves de **conhecimentos procedimentais.** Nesse contexto, percebemos que quase todas as equipes envolvidas adotaram a estratégia de escrever um SL para resolver os cinco problemas propostos, optando principalmente por resolvê-los por meio do método do escalonamento. Nesse processo, alguns alunos tiveram novamente dificuldades em manipulações algébricas e acabaram não obtendo êxito para chegarem ao resultado correto.

De modo geral, a análise dos eixos 4 e 5 mostraram que grande parcela dos estudantes compreenderam os conceitos e procedimentos de SL trabalhados nas etapas anteriores. Isso permitiu que os investigados fizessem uso dos conhecimentos previamente aprendidos, de modo a adotar a estratégia de resolução da escrita do SL e de sua posterior execução por meio dos diferentes métodos algébricos estudados. Nesse sentido, tivemos um bom aproveitamento dos indivíduos pesquisados na avaliação escrita, ficando apenas uma dupla de alunos com nota abaixo da esperada para a atividade.

Em suma, na etapa 1 apresentamos a forma matemática do conteúdo de SL usando o problema como ponto de partida. Já na etapa 2, as equipes participantes puderam ter uma formação conceitual na qual tiveram contato com as características de uma EL, de um SL e de suas soluções tecendo um construto mental capaz de estabelecer a relação entre essa linguagem matemática e a linguagem que foi utilizada na etapa 3 de definição do conteúdo. Sobre essa etapa, percebemos que possibilitou ao professor realizar com os estudantes discussões coletivas que facilitaram o entendimento e compreensão da linguagem formal do conteúdo de SL. Quando chegamos na etapa 4, de aplicação em novo problemas, vimos que as situações apresentadas exigiram dos investigados diferentes conhecimentos prévios de SL, numa complexidade que conforme preconiza Proença (2021) exigiu que os conceitos aprendidos estivessem bem formados permitindo que fossem ampliados e ressignificados.

Dentro desse panorama, em alcance ao objetivo da presente tese, podemos inferir que nossa proposta de ensino para aprendizagem do conteúdo de SL com estudantes do 2º ano do EM trouxe contribuições para o ensino desse conteúdo dentro de uma abordagem a luz da RP. Tais contribuições abarcaram avanços no ensino da álgebra e do pensamento algébrico, na abordagem da RP durante o trabalho em sala de aula relativo ao conteúdo de SL no EM e

apontamentos de dificuldades encontradas pelos alunos investigados. Sobre tais contribuições descreveremos brevemente a seguir:

(a) *Contribuições com avanços no ensino da álgebra e do pensamento algébrico:* nesse sentido, nossa organização de ensino possibilitou estabelecer um ambiente de aprendizagem significativa na qual os alunos pudessem resolver problemas usando diferentes estratégias por meio da álgebra. A vista disso, dificuldades como a transição da linguagem natural para a linguagem algébrica puderam ser repensadas e reconstruídas por meio das etapas de ensino propostas. Sob a ótica de Ponte, Branco e Matos (2009) acreditamos que as demandas de construção do pensamento algébrico dadas pelas competências de **representar**, **raciocinar** e **resolver problemas** tiveram avanços que auxiliaram a capacidade dos alunos de resolver problemas seguindo as quatro etapas de RP (representação, planejamento, execução e monitoramento) referenciadas por Proença (2018).

(b) *Contribuições com a abordagem da RP durante o trabalho em sala de aula:* Isso se sustenta no fato de não termos em nossa proposta de organização de ensino uma abordagem breve ou superficial, com prioridades apenas em cálculos algébricos, com ausência de problemas e com excessiva linguagem formal ou generalizada conforme vislumbramos nos apontamentos de diferentes autores. Além disso, o trabalho conceitual permitiu que os estudantes avançassem no estabelecimento de relações entre o conceito, a definição de conteúdo e os processos algorítmicos desenvolvendo o pensamento algébrico dos investigados nas demandas de **representar** e **raciocinar** possibilitando que os estudantes resolvessem diferentes problemas equivalentes a SL usando o conhecimento algébrico adquirido.

(c) *Contribuições em apontamentos de dificuldades no ensino de SL:* Conforme vimos em nossa seção de referenciais teóricos, apenas a dissertação de Martins (2019) apontava em seus estudos as dificuldades de alunos na aprendizagem de SL em abordagens de ensino por meio da RP. Dessa forma, nosso estudo avança nesse sentido de modo a indicar os entraves encontrados pelos estudantes de EM na RP de SL. A vista disso, vimos durante a abordagem de nossa organização de ensino, dificuldades de alunos nas etapas de *execução* com obstáculos inerentes a **conhecimentos procedimentais** e na etapa de *monitoramento* da resolução de problemas equivalentes a SL. Tal fato, indica a necessidade de novos estudos de maneira que ocorra um avanço ainda maior nas demandas de **raciocinar** e **resolver problemas** do pensamento algébrico preconizadas por Ponte, Branco e Matos (2009).

Entre as limitações encontradas para nossa pesquisa, ela se deu com alunos do 2º ano do EM do ano de 2022 que vieram de um período de pandemia. Esses estudantes tiveram que

fazer parte do ensino remoto emergencial entre os meses de março/2020 a julho/2021. Sendo assim, cursaram praticamente todo o 9º ano do EF e metade do 1º ano do EM de forma remota. As dificuldades de ensino de álgebra principalmente em relação a manipulações algébricas que já eram recorrentes no ensino presencial, se agravaram mais ainda no ensino remoto. Acreditamos que essa seja uma das principais causas de dificuldades de **conhecimentos procedimentais** serem frequentes durante as etapas 3 e 4 de nossa organização de ensino. Isso contribuiu principalmente em obstáculos nas etapas de *execução* na resolução de problemas que propusemos no andamento das atividades. Ainda foram observadas dificuldades menos frequentes de **conhecimentos linguísticos, semânticos e esquemáticos** que merecem ser trabalhadas de modo a serem amenizadas por abordagens de ensino e pesquisas na área de educação matemática.

Sobre o uso das quatro etapas (uso do problema como ponto de partida, formação do conceito, definição do conteúdo e aplicação em novos problemas) de Proença (2021) adotadas por nosso estudo, verificamos um salto qualitativo no ensino de SL promovido sobretudo pela formação conceitual. Sobre esse fato, não observamos trabalhos da literatura atual cuja abordagem de ensino por meio da RP permitissem a aprendizagem de conceitos, exemplos, não exemplos e a formação do construto mental de SL com alunos do EM. Nesse sentido, observamos em nossa investigação que a metodologia de ensino utilizada foi preponderante para que chegássemos aos objetivos almejados para o presente estudo.

Nesse panorama, acreditamos que essa proposta de organização de ensino promoveu contribuições que permitiram uma reflexão sobre o trabalho do conteúdo de SL feito no EM por meio da RP, abordando a aprendizagem conceitual previamente a definição do conteúdo. Vemos assim, a importância da formação conceitual como uma etapa relevante dentro de uma organização de SL de modo a facilitar a compreensão e entendimento desse conteúdo pelos estudantes. Por meio dele, foi possível os estudantes pesquisados não aprenderem pelo chamado ensino tradicional, mas aprender a resolver problemas concernentes ao conteúdo abordado. Além disso, nosso estudo ainda apontou dificuldades que precisam ser tratadas relativas não só ao conteúdo de SL mas ampliando para álgebra, que necessitam ser mais bem estudadas de modo a serem reconstruídas. Dessa forma, almejamos que nossa investigação seja precursora de novas pesquisas com propostas de ensino por meio da RP envolvendo SL na educação matemática, principalmente o trabalho de formação conceitual como a proposta de Proença (2021) ainda pouco explorada por trabalhos na literatura acadêmica atual.

REFERÊNCIAS

AKAMINE, C.; Proença, M. C. Ensino-aprendizagem de adição de frações via resolução de problemas. **Tecné, Episteme y Didaxis: TED**, n. 52, p. 303-322, 2022.

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. *et al*. (Org.). **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. São Paulo: Paco Editorial, p. 35-52, 2014.

ALMEIDA, A. W. F. **Ensino-aprendizagem de matemática na primeira série do ensino médio da escola de ensino médio**. 2016. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Unilab, Acarapé.

AMKA, A. Problem Solving-Based Learning on Systems of Linear Equation in Three Variables at SMA Srijaya Negara Palembang. **Problem Solving-Based Learning on Systems of Linear Equation in Three Variables at SMA Srijaya Negara Palembang**, v. 11, n. 6, p. 210-222, 2020.

AMSON, G. A. J.; AGUIAR FILHO, R. B.; JAMAL, R. M. **Matemática 2ª Série.** São Paulo: Anglo, 2012.

ANDREWS, P.; ÖHMAN, S. Swedish Upper Secondary Students' Understanding of Linear Equations: An Enigma?. **Acta Didactica Napocensia**, v. 12, n. 1, p. 117-129, 2019.

ANASTASIOU, L. G.; ALVES, L. P. Processos de enfermagem na universidade: pressupostos para estratégias de trabalho em aula. 7ª ed. Joiville: Univille, 2007.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas.** 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro.

ANDRADE, F. J. **O ensino de sistemas de equações lineares por meio da resolução de problemas.** 2013. 116 f. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – Profmat), Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

ANDRADE, C. P. ; ONUCHIC, L. R. Perspectivas para a Resolução de Problemas no GTERP. **Perspectivas para a Resolução de Problemas.** São Paulo: Livraria da Física, p. 443-466, 2017.

ANDRADE, S. Um caminhar crítico reflexivo sobre resolução, exploração e proposição de problemas matemáticos no cotidiano da sala de aula. **Perspectivas para resolução de problemas. São Paulo: Livraria da Física**, p. 355-395, 2017.

ATTEH, E. et al. The impact of using balance model in teaching linear equation. **Archives of Current Research International**, v. 11, n. 3, p. 1-12, 2017.

AUSUBEL, D. P. **Educational psychology: A cognitive view**. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** 1ª ed. São Paulo: Edições 70, 2011.

BATTAGLIOLI, C. S. M. **Sistemas lineares na segunda série do EM: um olhar sobre os livros didáticos.** 2008. 113 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BECHER, E. L**. Características do pensamento algébrico de estudantes do 1º ano do Ensino Médio.** 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

BEZZERA, I. C. P. et al. **Utilização de tecnologias digitais no ensino de sistemas lineares**. Anais IV CONAPESC. Campina Grande: Realize Editora, 2019. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/index.php/artigo/visualizar/57323>. Acesso em: 11 nov. 2022.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for research in mathematics education,** v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

BOCCARDO, M. E. **Sistemas lineares: aplicações e propostas de aula usando a metodologia de resolução de problemas e o software GeoGebra.** 2017. 82 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Editora Porto, v. 12, 1994.

BORRALHO, A.; BARBOSA, E. Exploração de padrões e pensamento algébrico. **Patterns: multiple perspectives and contexts in mathematics education (Projeto Padrões)**, p. 59-68, 2009.

BORGES, M. E. O. **Um mapeamento de pesquisas a respeito do estudo de Álgebra nos anos finais do EF e EM (2008 – 2017).** 2018. 197 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

BRANCO, N. C.V. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2008. 241 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Lisboa, Lisboa.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC):** educação é a base. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Ensino de 5ª a 8ª séries. Brasília-DF: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Resultados PISA 2018**. Brasília: INEP, 2021. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-

revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206>. Acesso em: 21 out. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Resultados SAEB 2019**. Brasília: INEP, 2021. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/saeb/desempenho-do-ensino-medio-melhora-no-saeb-2019>. Acesso em: 21 out. 2021.

BRITO, M. R. F. de. Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos. In: BRITO, M. R. F. (Org.). **Solução de problemas e a matemática escolar.** 2. ed. Campinas: Alínea, 2010.

BRUM, L. D.; CURY, H. N. Análise de Erros em soluções de questões de Álgebra: uma pesquisa com alunos do Ensino Fundamental. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 4, n. 1, p. 45–62, 2013.

CATANEO, V. I.; RAUEN, F. J. Registros de representação semiótica, relevância e conciliação de metas: uma análise do capítulo Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas do livro Matemática compreensão e prática de Ênio Silveira. **Educação Matemática Pesquisa,** v. 20, n. 2, p. 140-170, 2018.

CAMPOS, M. A. **Uma sequência didática para o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º. Ano do ensino fundamental**. 2019. Tese. (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia, Salvador.

CAMPOS, M. A. ; FARIAS, L. M. S. A Educação Matemática e o ensino de álgebra na perspectiva de desenvolvimento do pensamento algébrico. **Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo entre as ciências**, v. 9, n. 1, p. 167-188, 2020.

CHINNAPPAN, M. Relational knowledge and successful problem solving in algebra. **Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia**, v. 27, n. 2, p. 112-134, 2004.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados,** v. 32, p. 171-187, 2018.

COLL, C.; VALLS, E. **A aprendizagem e o ensino de procedimentos.** In: COLL, C.; POZO, J. I.; SARABIA, B.; VALLS, E. (Org.). Os conteúdos na reforma: ensino e aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes. Porto Alegre: Artmed, p. 73-118. 1998.

CONCEITO. In: DICIO, **Dicionário Online de Português.** Porto: 7Graus, 2021. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/conceito/>. Acesso em: 16/12/2021.

COSTA, M. S.; ERICEIRA, T. B.; NUNES, C. B. O currículo de Matemática do EM sob a luz da BNCC: reflexões acerca das competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos. **Pesquisa e Debate em Educação**, v. 11, n. 1, 2021.

COSTA, W. R. Investigando a conversão da escrita natural para registros em escrita algébrica em problemas envolvendo equações de primeiro grau. 2010. Dissertação (Mestrado).

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

CUNHA NETO, J. H. **Organização do ensino-aprendizagem de sistema de equações lineares no ensino médio: um experimento didático-formativo**. 2020. Tese (Doutorado em Educação), Universidade de Uberaba, Uberaba.

CURY, H. N. ; BORTOLI, M. F. Pensamento algébrico e análise de erros: Algumas reflexões sobre dificuldades apresentadas por estudantes de cursos superiores. **Revista de Educação, Ciências e Mathematics**, v. 1, n. 1, p. 101-113, 2011.

DEWI, I. L. K. et al. Identification of Mathematics Prospective Teachers' Conceptual Understanding in Determining Solutions of Linear Equation Systems. **European Journal of Educational Research**, v. 10, n. 3, p. 1157-1170, 2021.

DELAZERI, G. R. **A competência de resolução de problemas que envolvem o pensamento algébrico: um experimento no 9º ano do ensino fundamental.** 2017. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

DEMONTY, I.; VLASSIS, J.; FAGNANT, A.. Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. **Educational Studies in Mathematics**, v. 99, p. 1-19, 2018.

DURANTI, A. **Units of participation.** In: DURANTI, A. Linguistic anthropology. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

ECHEVERRÍA, M. D. P. A solução de problemas em matemática. In: Pozo, J. I. (org.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

ECHEVERRÍA, M. D. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: Pozo, J. I.(org.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

ESTEVÃO, E. J. O. **Dificuldades na aprendizagem e ensino de álgebra: atividades propostas para minimizar essas dificuldades.** 2021. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – Profmat), Universidade Federal de Goiás, Catalão.

ESTEVÃO, E. J. O.; GONÇALVES, T. M. N. Uma proposta de atividades para minimizar as dificuldades na aprendizagem de álgebra. **Brazilian Journal of Development**, v. 7, n. 1, p. 10849-10863, 2021.

FALCON, R. Algebraic Reasoning in the Middle Grades: A View of Student Strategies in Pictorial and Algebraic System of Equations. **Online Submission**, 2009.

FERREIRA, A. E. G. **A importância dos sistemas lineares no EM e a contribuição para a matemática e suas aplicações**. 2013. 94 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2013.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. **Álgebra ou geometria:** para onde pende o pêndulo?. Pro-Posições, Campinas, v. 3, n. 1, p. 39-54, 1992.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. **Contribuições para um repensar... a educação algébrica elementar**. Pro-Posições, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78-91, 1993.

FLEMMING, D. M.; LUZ, E. F.; MELLO, A. dC. C. **Tendências em educação matemática.** Palhoça: UnisulVirtual, v. 2, 2005.

FONSECA, S. J. **Análise das dificuldades enfrentadas por alunos do ensino médio em interpretar e resolver problemas de matemática financeira.** 2016. 105 f. Dissertação (Pós-Graduação em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana, 2016.

FONSECA, R. A. **Uso de princípios básicos de programação como alternativa para o ensino de sistemas lineares e matrizes no EM**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – Profmat), Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica.

FRANCO, M. L. P. B. **Análise de conteúdo.** 3.ed. Brasília: Liber Livro Editora, 2008.

FREITAS, M. A. **Equação de 1º grau: métodos de resolução e análise de erros no ensino médio.** 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

FREITAS, J. L. M; GUADAGNINI, M. R. O uso da fatoração na resolução de equações do 2º grau por alunos do 9º ano do ensino fundamental. **Anais do Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 7, n. 1, 2013.

FRIEDLANDER, A.; TABACH, M. Promoting multiple representations in algebra. **The roles of representation in school mathematics**, p. 173-185, 2001.

FROTA, N. M. **Comparação de estratégias de ensino:** aula expositiva dialogada e hipermídia educativa sobre punção venosa periférica. 2016. 160 f. Tese (Doutorado em Enfermagem) - Faculdade de Farmácia, Odontologia e Enfermagem , Departamento de Enfermagem, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.

GAGNÉ, R. M. **Como se realiza a aprendizagem**. (Tradução de Therezinha Maria Ramos Tovar). 1. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S/A, 1973.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

GODOY, A. S. **Pesquisa qualitativa:** tipos fundamentais. Revista de Administração de empresas, v. 35, n. 3, p. 20-29, 1995.

GOMES, R. Análise e Interpretação de dados em Pesquisa Qualitativa. In: DESLANDES, Suely Ferreira; CRUZ NETO, Otavio; GOMES, Romeu; MINAYO, Maria Cecilia de Souza (Org.). Pesquisa social: teoria, método e criatividade. 17.ed. Petrópolis: Vozes, 2000.

GONÇALVES, B. M.; PROENÇA, M. C. Análise dos conhecimentos conceitual e procedimental de alunos do primeiro ano do ensino médio sobre equação do 2.º grau. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática,** v. 5, n. 2, p. 209-228, 2020.

GOULART, A. M. A. **A aprendizagem significativa de sistemas de equações do 1º grau por meio da resolução de problemas.** 2014. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

HOLANDA, M. D. M.; FREITAS, I. B.; RODRIGUES, A. C. S. Matemática no ensino médio: dificuldades encontradas nos conteúdos das quatro operações básicas. **Revista de Iniciação à Docência,** v. 5, n. 2, p. 56-69, 2020.

HUTCHBY, I.; WOOFFITT, R. **Conversational analysis.** Cambridge: Polity, 1998.

IEZZI, G. et al. **Matemática Ciência e Aplicações.** 9. ed., v. 2. São Paulo: Saraiva, 2016.

IRIAS, D. F. et al. Cálculo Diferencial e Integral I: Analisando as dificuldades dos alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. **Revista da Educação Matemática**, v. 1, 2011.

JORDÃO, A. L. I. **Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3 no 2º ano do ensino médio.** 2011. 193 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

JORDÃO, A. L. I.; BIANCHINI, B. L. Um Estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio. Revista de Produção Discente em Educação Matemática, v. 1, n. 1, 2012.

JUSTO, J. S.; VASCONCELOS, M. S. Pensando a fotografia na pesquisa qualitativa em psicologia. Estudos e Pesquisas em Psicologia, v. 9, n. 3, p. 760-774, 2009.

KLAUSMEIER, H. J.; GOODWIN, W. Manual de psicologia educacional: aprendizagem e capacidades humanas. Tradução de M. C. T. A. Abreu. São Paulo: Harper & Row, 1977.

KUHN, M. C.; LIMA, E. Álgebra nos Anos Finais do EF: reflexões a partir dos PCN e da BNCC para construção do pensamento algébrico significativo. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 3, p. 1-23, 2021.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica:** do processo à implementação. Tradução de: Magda França Lopes. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LIMA, K. R. A. S. **Dificuldades no ensino aprendizagem das equações do 2º grau dos alunos do 1º ano do ensino médio.** 2019. Monografia (Licenciatura em Matemática), Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Santana do Araguaia.

LUZ, J. A.; TRAVASSOS, W. B.; PROENÇA, M. C. de. Resolução de problemas e o ensino de sistemas de equações de primeiro grau: um diálogo com professores. **TANGRAM - Revista de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 5, n. 4, p. 48–73, 2022.

MAHARANI, N. Perbandingan Tingkat Pemahaman Mahasiswa STMIK STIKOM Indonesia Pada Metoda Sarrus dan Metoda Cramer pada Penyelesaian Sistem Persamaan Linier. **PENDIPA Journal of Science Education,** [S. l.], v. 4, n. 2, p. 66–73, 2020. DOI: 10.33369/pendipa.4.2.66-73. Disponível em: https://ejournal.unib.ac.id/pendipa/article/view/11128. Acesso em: 23 may. 2023.

MAIA-AFONSO, E. J. **A resolução de problemas e os futuros pedagogos: análise de um processo formativo para o ensino da geometria nos anos iniciais.** 2021. 268f. Tese (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

MAIA, E. C. et al. Concepções epistemológicas sobre o processo de ensino e aprendizagem da álgebra. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 5, p. 29681-29695, 2020.

MARQUES, A. P. **Desenvolvimento do pensamento algébrico:** construindo significados para conteúdos de Álgebra dos anos finais do EF. In: EBRAPEM - ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 21, 2017, Pelotas, p. 01-12.

MARTINS, F. C. **Ensino-aprendizagem de sistemas lineares na formação do professor de Matemática via exploração, resolução e proposição de problemas**. 2019. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática), Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.

MARTINS, F. C.; ANDRADE, S. Ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares na licenciatura através da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. **Revista de Educação Matemática**, v. 20, n. 01, p. e023005-e023005, 2023.

MARTINS, J. S. **Sociologia da Fotografia e da Imagem.** São Paulo: Contexto, 2008.

MAUAD, A. M. Fotografia e História – possibilidades de análise. In. **A Leitura de Imagens na Pesquisa Social.** CIAVATTA, M.; ALVES, N. (Org.). São Paulo: Cortez, 2004, p.19-36.

MATSUDA, F. F. S. **Um ensino de equação de 1º grau com uma incógnita via resolução de problemas.** 2017. 131f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

MAYER, R. E. **Thinking, problem solving, cognition.** 2. ed. New York: WH Freeman and Company, 1992.

MENDES, D. C .B. **Considerações elementares da metodologia de análise de conteúdo em pesquisa qualitativa no âmbito das ciências sociais.** Faculdade Sant'Ana em Revista, *[S. l.]*, v. 2, n. 1, 2018. Disponível em: <https://iessa.edu.br/revista/index.php/fsr/article/view/118>. Acesso em: 1 fev. 2022.

MINAYO, M. C. S. **O desafio do conhecimento**: pesquisa qualitativa em saúde. 7.ed. São Paulo: Hucitec; Rio de Janeiro: Abrasco, 2000.

MOHR, L. C.; BINOTTO, R. R. Concepções de álgebra, educação algébrica e pensamento algébrico de professores da Educação Básica. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, v. 6, n. 2, p. 175-192.

MORAIS, A. M. L. **A exploração de sequências e regularidades como suporte para o desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2012. 235 f. Tese (Doutorado em Educação) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa.

MOREIRA, M. A. **O que é afinal aprendizagem significativa**. Porto Alegre: UFRGS, 2010.

MÜLLER, G. C.; HETKOWSKI, T. M.; PINHEIRO, G. S. (Orgs.). **Estratégias de ensino da Matemática:** entrelaçando saberes para a educação básica. Salvador: EDUNEB, 2017.

NABAIS, M. M. S. **Equações do 2. º grau: um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9. º ano**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação), Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa.

NEGROMONTE, M. A. O. et al. Construção do pensamento algébrico no ensino fundamental: dificuldades. **Brazilian Journal of Development**, v. 5, n. 10, p. 20597-20610, 2019.

NEVES, D. C. **Sobre a aprendizagem da multiplicação dos números negativos**. 2012. Monografia (Graduação em Matemática) – Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

NOBRE, S; AMADO, N.; PONTE, J. P. **Uma experiência de ensino com alunos do 9. º ano para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico.** Atas do XIX Colóquio da Secção Portuguesa da AFIRSE 2012**,** p. 2160-2171, 2012.

NONHORA, H.; BORTOLI, M. Pensamento algébrico e análise de erros: algumas reflexões sobre dificuldades apresentadas por estudantes de cursos superiores. **Revista de Educação, Ciências e Mathematics**, v. 1, n. 1, p. 101-113, 2011.

OKTAÇ, A. Conceptions about system of linear equations and solution. **Challenges and strategies in teaching linear algebra**, p. 71-101, 2018.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo: UNESP, p. 199-218, 1999.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema-Mathematics Education Bulletin,** p. 73-98, 2011.

ONUCHIC, L. R. et al. **Resolução de problemas:** teoria e prática. Paco Editorial, 2019.

PACHECO, E. A. **Reflexões sobre as dificuldades no processo ensino e aprendizagem de álgebra: equação do 1º grau.** 2009. 59f. Monografia (Licenciatura Plena em Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém.

PAIVA, V. M. A. S. **Autoavaliação: uma proposta para a aprendizagem de língua inglesa no Ensino Médio.** 2017. 173f. Tese (Doutorado em Estudos da Linguagem) - Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

PARANÁ. Diretrizes Curriculares da Educação Básica. Curitiba, 2008.

PEREIRA, W. L. **Sistemas lineares: Uma sequência didática para o EM e aplicações.** 2017. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – Profmat), Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.

PEREIRA, J. E. **Dificuldades dos alunos em aprender álgebra.** 2016. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de São João Del-Rei, São João Del-Rei.

PIMENTEL, D. E. **Metodologia da resolução de problemas no planejamento de atividades para a transição da Aritmética para a Álgebra.** 2010. 136 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.

PINHEIRO, B. R. M. **Uma abordagem da álgebra dentro do currículo do EF: mudanças e proposta para sala de aula.** 2019. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – Profmat), Universidade Federal do Semi-Árido, Mossoró.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

PONTE, J. P. **Números e álgebra no currículo escolar.** In: XIV EIEM-ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2006, Lisboa. **Anais...** Lisboa: SEM-SPCE, p. 05-27.

PONTE, J. P. ; BRANCO, N. ; MATOS, A . **Álgebra no ensino básico.** 1. ed. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2009.

PONTES, E. A. S. Noção intuitiva no ato de ensinar e aprender matemática por meio de uma atividade de ensino de sistemas lineares com coeficientes positivos. **Revista Baiana de Educação Matemática**, v. 2, n. 01, p. 01-15, 2021.

POSSAMAI, J. P.; ALLEVATO, N. S. G. Elaboração/Formulação/Proposição de Problemas em Matemática: percepções a partir de pesquisas envolvendo práticas de ensino. **Educação Matemática Debate**, v. 6, n. 12, p. 1-28, 2022.

POZO, J. I. **A aprendizagem e o ensino de fatos e conceitos.** In: COLL, C.; POZO, J. I.; SARABIA, B.; VALLS, E. Os conteúdos na reforma: ensino e aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes. Trad. Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998, p. 17-71.

PRADINI, W.; WINARSIH, W. Analysis of junior high school students difficulty in solving linear equation in two variables word problem. In: **AIP Conference Proceedings**. AIP Publishing LLC, p. 060021, 2020.

PROENÇA, M. C.; PIROLA, N. A. Um estudo sobre o desempenho e as dificuldades apresentadas por alunos do EM na identificação de atributos definidores de polígonos. **Zetetiké**, Bauru, v, 17, n.31, p. 11-45, 2009.

PROENÇA, M. C. **Resolução de problemas:** encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de matemática em sala de aula. 1. ed. Maringá: EdUEM, 2018.

PROENÇA, M. C. et al. Resolução de Problemas de Matemática: análise das dificuldades de alunos do 9. º ano do ensino fundamental. **Amazónia: Revista de educação em ciências e matemáticas**, v. 16, n. 36, p. 224-243, 2020.

PROENÇA, M. C. Resolução de Problemas: uma proposta de organização do ensino para a aprendizagem de conceitos matemáticos. **Revista de Educação Matemática,** v. 18, p. e021008-e021008, 2021.

PROENÇA, M. C.; CAMPELO, C. S. A.; SANTOS, R. R. Problem Solving in BNCC: reflections for its insertion in the curriculum and in Mathematics teaching at Elementary School. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, *[S. l.]*, v. 13, n. 6, p. 1–19, 2022. DOI: 10.26843/rencima.v13n6a20. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/4382. Acesso em: 8 jun. 2023.

PROENÇA, M. C.; MAIA-AFONSO, E. J.; TRAVASSOS, W. B.; CASTILHO, G. R. Resolução de Problemas de Matemática: análise das dificuldades de alunos do 9.º ano do EF. Amazônia: **Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v.16, n. 36, p. 224-243, 2020.

PROENÇA, M. C.; MAIA-AFONSO, E. J. Resolução de problemas: análise de propostas de ensino em dissertações de mestrado profissional. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v.09, n.18, p.180-201, jan./jun., 2020.

PUTRI, D. R.; NASIR, F.; MAHARANI, A. Students' Mathematical Problem Solving Ability in Linear System with Two Variable. **Jurnal Pendidikan MIPA**, v. 23, n. 4, p. 1839-1849, 2022.

RAKHMAWATI, I. A. et al. An analysis of problem solving ability among high school students in solving linear equation system word problems. In: **Journal of Physics: Conference Series**. IOP Publishing, p. 1-10, 2019.

RAMOS, M. L. P. D.; CURI, E. Análisis de errores en resolución de ecuaciones y desigualdades exponencial: revelando las dificultades de los estudiantes. **Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática,** v. 11, n. 44, 15 dic. 2015.

ROBERTS, A.; LE ROUX, K.. A commognitive perspective on Grade 8 and Grade 9 learner thinking about linear equations. **pythagoras**, v. 40, n. 1, p. 1-15, 2019

RODRIGUES, R.; BENTO, C. A.; CURI, E. A transformabilidade dos registros de representação semiótica no ensino de equações de reta. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, v. 7, n. 2, p. 53-68, 2012.

RODRIGUES, M. S. **Aplicações de sistemas lineares voltadas ao EM.** 2017. 75f . Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2017.

RODRÍGUEZ, M. et al. Comprensión del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas: un estudio de casos. **Educación MatEMática**, v. 34, n. 3, p. 163-193, 2022.

ROSENTHAL, Gabriele. **Pesquisa social interpretativa:** uma introdução. Edipucrs, 2014.

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical problem solving.** Orlando: Academic Press, 1985.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JUNIOR, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989, p. 31-42.

SCHWANTES, V.; SCHWANTES, E. B. F. Uma reflexão sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico discente no Ensino Fundamental. **Varia Scientia**, v. 4, n. 7, p. 77-87, 2004.

SEVERINO, A. D. **Metodologia do trabalho científico.** São Paulo: Cortez, 2012.

SIBGATULLIN, I. R. et al. A Systematic Review on Algebraic Thinking in Education. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, v. 18, n. 1, 2022.

SILVA, C. B. **Introdução a álgebra no ensino fundamental: o "X" da questão.** 2016. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – Profmat), Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente.

SILVA, M. M. **Dificuldades de alunos do ensino médio em questões de matemática do ensino fundamental.** 2006. 201f . Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

SILVA, J. P. **As dificuldades dos estudantes na transposição de informações dos enunciados de problemas envolvendo equações do 1º grau para linguagem algébrica.** 2013.

SILVA, J. A. **Resolução de problemas e representações múltiplas no ensino de sistemas de equações polimoniais do 1º Grau com duas incógnitas.** 2019. 165 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática), Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.

SILVA, P. F. **Dificuldades encontradas na resolução de problemas envolvendo equações do 1º grau: uma análise dos erros de uma turma do 8º ano.** 2019. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, Itaporanga.

SILVA, J. P; SILVA, L. R. C. **Dificuldades de estudantes de ensino médio em operações com frações e decimais.** In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA GRANDE DOURADOS, 2, 2021, Dourados. **Anais...** UFGD, 2021.

SOUSA, A. C.; PROENÇA, M. C. Uma Proposta de Ensino de Equação de 1. º Grau com Uma Incógnita Via Resolução de Problemas. **Revista Prática Docente**, v. 4, n. 2, p. 431-451, 2019.

SOUZA, K. R.; KERBAUY, M. T. M. Abordagem quanti-qualitativa: superação da dicotomia quantitativa-qualitativa na pesquisa em educação. **Educação e Filosofia,** v. 31, n. 61, p. 21-44, 2017.

SOUZA, S. B. **O ensino da álgebra no 8º ano do ensino fundamental: compreendendo algumas das dificuldades apresentadas pelos alunos por meio da análise da resolução de exercícios.** 2019. 97 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

STEFANI, A.; PROENÇA, M. C. Análise das dificuldades de alunos dos anos finais do ensino fundamental na resolução de problemas de perímetro e área. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 8, n. 16, p. 97–118, 2020. DOI: 10.33871/22385800.2019.8.16.97-118. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6141>. Acesso em: 29 nov. 2022.

STERNBERG, R. J. **Psicologia cognitiva**. Tradução de: Roberto Cataldo Costa. 4. ed. Porto Alegre: ArtMed, 2008.

SULEIMAN, A. R. Concepções dos professores em relação à matemática, seu ensino e as dificuldades dos alunos. **Acta Scientiae**, v. 18, n. 2, 2016.

TEDESCO, C.; GIARETA, M. K. **Conhecimento algébrico: manifestações de dificuldades reveladas por alunos de uma turma de ensino médio do município de Rondinha/RS.** In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2009, Ijuí. **Anais...** EGEM, 2009. Disponível em: <chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_12.pdf> . Acesso em: 17 jan. 2023.

TRAVASSOS, W. B.; PROENÇA, M. C. Ensino-aprendizagem de inequações: uma proposta envolvendo congruência semântica. In: PROENÇA, M. C. (Org.). **Formação de conceitos matemáticos**: propostas de ensino aos anos iniciais e finais do EF. Campo Mourão-PR.: Editora Fecilcam, 2020, p. 78-101.

TEIXEIRA, J. R. T. **Sobre a regra de sinais dos números inteiros negativos**. 2013. Monografia (Graduação em Matemática) – Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

TÖMAN, U.; GÖKBURUN, Ö. What Was and Is Algebraic Thinking Skills at Different Education Levels?. **World Journal of Education**, v. 12, n. 4, p. 8-20, 2022.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais:** a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

USISKIN, Z. **Concepções sobre a álgebra da Escola Média e utilização de variáveis.** Tradução de: Hygino H. Domingues. *In*: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org.). As idéias da álgebra. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

VALENZUELA, S. T. F. (2007). **O uso de dispositivos didáticos para o estudo de técnicas relativas a sistema de equações lineares no EF.** 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Ciências Humanas e Sociais, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

VYGOTSKY, L. S. **Psicologia da arte.** São Paulo: M. Fontes, 1999.

WALLE, J. A. V. **Matemática no EF-: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula**. J. A. V. Walle: tradução Paulo Henrique Colones. 6ª ed. Porto Alegre: ArtMed, 2009.

WETTERGREN, S. Identifying and promoting young students' early algebraic thinking. **LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education**, v. 10, n. 2, p. 190–214-190–214, 2022.

WICAKSONO, S. C. R. et al. An Analysis of the Student Metacognition Level in Problem-Solving via Problem Stories in the Materials of the Two-Variable Equation System. **International Online Journal of Education and Teaching**, v. 7, n. 4, p. 1493-1499, 2020.

WIYAH, R. B. et al. Error analysis in solving the linear equation system of three variables using Polya's problem-solving steps. In: **Journal of Physics: Conference Series**. IOP Publishing, p. 012084, 2021.

YANG, D. C.; LIN, Y. C. Examining the differences of linear systems between Finnish and Taiwanese textbooks. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, v. 11, n. 6, p. 1265-1281, 2015.

YIN, R. K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim.** Tradução Daniel Bueno. Revisão técnica: Dirceu da Silva. Porto Alegre: Penso, 2016.

ZABALA, A. **A prática educativa:** como ensinar. Trad. Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

ZHANG, Huirong; CAI, Jinfa. Teaching mathematics through problem posing: insights from an analysis of teaching cases. ZDM — Mathematics Education, v. 53, p. 961-973, 2021

APÊNDICE A – TCLE - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Caríssimo (a) pai, mãe ou responsável legal do aluno(a) participante da pesquisa.

O pesquisador Professor Me. João Alessandro da Luz, aluno do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática (PCM – UEM), em nível de doutorado, orientado pelo Professor Dr. Marcelo Carlos de Proença, vem por meio deste convidar seu filho (a) a participar desta pesquisa acadêmica.

A referida pesquisa é intitulada "*Resolução de Problemas: contribuições de uma proposta de ensino de sistemas lineares no ensino médio"* e tem por objetivo investigar as contribuições de uma organização de ensino para aprendizagem do conceito matemático referente ao conteúdo de Sistemas Lineares usando abordagem da Resolução de Problemas.

O desenvolvimento da pesquisa será durante o 2º trimestre do ano letivo de 2022 com a turma do 2º ano X do EM. Nestas aulas serão trabalhados os conceitos que abarcam o conteúdo de sistemas lineares e o desenvolvimento das aulas e atividades se darão com os pressupostos teóricos que embasam a Resolução de Problemas, possibilitando assim o desenvolvimento de sequências didáticas nesta perspectiva.

Destacamos, que durante as aulas, serão utilizadas diversas formas de coletas de dados para a pesquisa, a saber: gravação do áudio das aulas; registro imagens por meio de fotografias; atividades impressas realizadas pelos estudantes e devolvidas ao professor; e, anotações de campo do professor.

Alertamos que poderão ocorrer riscos e desconfortos aos participantes que ao se envolverem com a pesquisa terão contato com outros participantes. Esses riscos/desconfortos podem se apresentar de maneira emocional, psicológica, cultural, física, entre outros e podem acarretar algum mal-estar ao participante. Porém, informamos que o pesquisador estará atento a todo e qualquer acontecimento atípico, para proporcionar ajuda sobre qualquer risco ou incômodo que possa vir a ocorrer, comprometendo-se a propiciar o máximo de benefícios e o mínimo de riscos. Tais medidas de contenção de riscos sucedem intervenção pontual sobre qualquer acontecimento, disponibilidade de diálogo a qualquer momento, aplicação das leis e ordens seguidas pela Universidade Estadual de Maringá (UEM) para o bem-estar do estudante, entre outras que favoreçam os estudantes. Além disso, como providências para minimizar possíveis riscos, a pesquisa será sempre acompanhada pela equipe pedagógica e direção.

Dessa forma, os benefícios tangenciam de forma direta o aperfeiçoamento da prática do professor em sala e o processo de ensino e aprendizagem dos alunos em sala de aula. Sendo assim, de modo direto, os benefícios esperados são: a) propiciar um aprimoramento das ações didáticas do professor e pesquisador em sala de aula; b) permitir aos estudantes participarem de uma organização de ensino para aprendizagem de conceitos matemáticos do conteúdo de sistemas lineares por meio da resolução de problemas, processo esse inédito no meio acadêmico; c) evidenciar limites e possibilidades no processo de ensino envolvendo a resolução de problemas; d) fornecer subsídios para que os alunos aprendam o conteúdo abordado de forma concreta, entendendo seus conceitos, variações, ampliando e compreendendo suas inúmeras possibilidades. Além disso, de forma indireta, a pesquisa busca apontar contribuições para o campo da Educação Matemática e para os futuros pesquisadores e professores interessados sobre a temática abordada.

Ao pesquisador caberá o desenvolvimento da pesquisa de forma confidencial, seguindo as Resoluções Normativas nº 466/2012 e nº 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde (CNS). Vale ressaltar, que o (a) voluntário (a) poderá se recusar a participar, ou retirar seu consentimento a qualquer momento da realização do trabalho ora proposto, não havendo qualquer penalização ou prejuízo para o (a) mesmo (a). Será garantido sigilo dos resultados obtidos neste trabalho, assegurando assim a privacidade dos participantes. Não haverá qualquer despesa ou ônus financeiro aos participantes voluntários desta pesquisa e não haverá qualquer procedimento que possa incorrer em danos físicos aos voluntários e, portanto, não há necessidade de indenização por parte da equipe científica e/ou Instituição responsável.

Quaisquer dúvidas sobre a pesquisa, o participante pode entrar em contado com a responsável, Professor Me. João Alessandro da Luz pelo e-mail joaoalessandro.luz@gmail.com, através da equipe pedagógica ou direção escolar pelo telefone (44) 35231515 ou pelo NRE – Núcleo Regional de Ensino de Campo Mourão pelo telefone (44) 35182750. Da mesma forma, é possível obter maiores informações no Comitê Permanente de Ética em Pesquisas Envolvendo Seres Humanos, localizado na Av. Colombo, 5790, UEM-PPG, Sala 4, Maringá-PR, inscrito pelo CEP: 87020-900, telefone: (44) 3011-4444, e endereço eletrônico definido por: copep@uem.br.

Ao final da pesquisa o participante terá livre acesso para discutir os dados com o pesquisador. Informamos que todos os dados obtidos durante a realização da organização de ensino serão utilizados somente para os fins desta pesquisa, e serão tratados com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade. Sendo assim, todo material será transformado em meio eletrônico, e o material proveniente da coleta de dados será destruído; o material eletrônico permanecerá em posse do pesquisador por 5 anos e após esse tempo também será destruído.

Desta forma, diante da leitura e entendimento dos esclarecimentos aqui colocados, por estar de pleno acordo com o teor do mesmo, dato e assino este termo de consentimento livre e esclarecido.

Eu, _____

declaro que fui devidamente esclarecido (a) e concordo em permitir a participação VOLUNTÁRIA do (a) aluno (a) _____

da pesquisa acima citada.

_____ Data:_____

Assinatura

Eu, JOÃO ALESSANDRO DA LUZ, declaro que forneci todas as informações referentes ao projeto de pesquisa supra nominado e que cada participante da pesquisa receberá uma via deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

_____ Data:.....

Assinatura do pesquisador

APÊNDICE B – TALE - TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Caro aluno(a), gostaríamos de convidá-lo a participar da pesquisa de doutorado do pesquisador Prof. Me. João Alessandro da Luz, que tem como objetivo analisar que contribuições uma sequência didática, organizada e implementada com foco na resolução de problemas, favorece a aprendizagem de um conteúdo matemático por alunos do 2° ano do Ensino Médio.

Quanto aos procedimentos da pesquisa: para que a pesquisa ocorra, a sua participação é muito importante pois serão através das suas resoluções dos problemas, das gravações em áudio das discussões geradas em equipe e dos diálogos realizados com o professor pesquisador, que iremos analisar as dificuldades na resolução de problemas de modo que possamos sanar tais dificuldades, sobretudo, aprendendo matemática de um jeito diferente, por meio da resolução de problemas contextualizados.

Quanto a coleta de dados: Os únicos dados seus que serão utilizados na pesquisa serão as resoluções de questões, perguntas e problemas matemáticos, além das gravações em áudio feitasem sala de aula para que o pesquisador possa entender a sua maneira de pensar através dos diálogos com seus colegas e com o professor pesquisador. Lembramos também que você não terá custo financeiro algum com o material utilizado na implementação da pesquisa.

Quanto aos riscos: você pode achar que determinadas perguntas te incomodam, ou não se senteconfortável para resolver um problema matemático na lousa. Nesse caso, você pode escolher não responder quaisquer perguntas que o façam sentir-se incomodado.

Quanto aos benefícios: as atividades desenvolvidas na implementação dessa sequência didática bem como a maneira do professor conduzir a aula nessa perspectiva do ensino via resolução de problemas poderão contribuir para a aprendizagem do conteúdo matemático estudado, assim como propiciar o engajamento, autonomia, liderança, raciocínio e criticidade.

Quanto a confidencialidade: conforme dito acima, seu nome não aparecerá em lugar nenhum na pesquisa de doutorado, assim como as gravações realizadas na sala e as resoluções feita por você. Apenas o professor pesquisador João Alessandro da Luz e seu orientador de doutorado Prof. Dr. Marcelo Carlos de Proença terão acesso.

Quanto a recusa em participar: se você optar por participar deste estudo, informamos que a qualquer momento você pode recusar participar da pesquisa, seja devido a algum desconforto,ao horário marcado, a sua disponibilidade ou outro motivo, sem que haja qualquer prejuízo ou constrangimento.

Quanto a dúvida e reclamações: Caso você tenha dúvidas ou necessite maiores esclarecimentos, pode contatar o professor pesquisador a qualquer momento durante a realização da pesquisa, ou pelos seguintes meios.

Contato do Professor pesquisador João Alessandro da Luz
Telefone: (44) 3017-6264
E-mail: jluz@escola.pr.gov.br

Qualquer dúvida com relação aos aspectos éticos poderá ser esclarecida com o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa (COPEP) envolvendo Seres Humanos da UEM, no endereço abaixo:

Contato do COPEP/UEM
Universidade Estadual de Maringá.
Av. Colombo, 5790, UEM-PPG, Sala 4.
CEP: 87020-900, Maringá-PR
Telefone: (44) 3011-4444 E-mail: copep@uem.br.

Por fim, solicitamos que você preencha os locais indicados abaixo com seu nome completo e assinatura, além de colocar uma rubrica em cada folha, para que assim possamos garantir que você leu e concordou em participar da pesquisa. Sobretudo, atestamos a garantia de que você receberá uma via do Termo de Assentimento Livre e Esclarecido – TALE.

Eu, _____ (seu nome

completo por extenso) declaro que fui devidamente esclarecido e concordo em participar VOLUNTARIAMENTE da pesquisa.

_____ Data: ___/___/____

Assinatura

APÊNDICE C – MODELO DA NOTA DE CAMPO A SER UTILIZADA NAS AULAS DE ORGANIZAÇÃO DE ENSINO

NOTAS DE CAMPO

DADOS DE IDENTIFICAÇÃO:

Aula(s) da Organização de Ensino Trabalhadas: _____

Data: ____/____/____

Horário de Início: _____

Horário de Término: _____

Atividades ou situações vivenciadas: _____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

APÊNDICE D – PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Resolução de Problemas: contribuições de uma proposta de ensino de sistemas lineares no ensino médio.

Pesquisador: Marcelo Carlos de Proença

Área Temática:

Versão: 2

CAAE: 60603422.9.0000.0104

Instituição Proponente: CCE - Centro Ciências Exatas

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 5.716.066

Apresentação do Projeto:

Trata-se de análise de respostas ao parecer pendente nº 5.630.369, emitido pelo COPEP em 08 de setembro de 2022, referente ao projeto de pesquisa em nível de doutorado vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas, da Universidade Estadual de Maringá.

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo Primário: Analisar as contribuições de uma proposta de ensino organizada com foco na abordagem da resolução de problemas, que se evidenciam no favorecimento da aprendizagem conceitual e processual do conteúdo de SL com estudantes do 2º ano do EM.

Objetivo Secundário: Os objetivos específicos serão pautados na análise:1 - Das dificuldades e dos conhecimentos apresentados pelos alunos no processo de resolução de problemas, na etapa do problema como ponto de partida; 2 - Da compreensão, empenho e desempenho dos alunos no processo de ensino de definição do conteúdo de sistemas lineares;3 - Da compreensão, empenho e desempenho dos alunos na resolução de novos problemas.4 - Da compreensão da aprendizagem conceitual dos alunos relativas ao conteúdo de sistemas lineares.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

AVALIAÇÃO DE RISCOS E BENEFÍCIOS: Considera-se que os possíveis riscos a que estarão sujeitos

Endereço: Av. Colombo, 5790, UEM-PPG, sala 4
Bairro: Jardim Universitário **CEP:** 87.020-900
UF: PR **Município:** MARINGA
Telefone: (44)3011-4597 **Fax:** (44)3011-4444 **E-mail:** copep@uem.br

os participantes da pesquisa serão suplantados pelos benefícios apontados.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

Esse projeto de tese tem como objetivo analisar as contribuições de uma proposta de ensino para o conteúdo de sistemas lineares por meio da resolução de problemas que se evidenciam no favorecimento da aprendizagem conceitual e processual desse conteúdo com estudantes do 2º ano do ensino médio. Para tanto, esse trabalho trata-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa na modalidade de pesquisa pedagógica. Os participantes dessa investigação serão 34 alunos, sendo 12 do gênero masculino e 22 do gênero feminino do 2º ano do ensino médio de uma escola pública cujo professor-pesquisador é docente da disciplina de matemática. Os instrumentos empregados para coleta de dados serão: gravação de áudio, fotografias, registros dos alunos e notas de campo do professor pesquisador. Os procedimentos de análise de dados farão uso das técnicas da análise de conteúdo de Bardin.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Apresenta cronograma compatível com a execução do projeto. O orçamento está detalhado e é de responsabilidade dos pesquisadores. Apresenta documento de autorização do Colégio Estadual Cívico Militar Marechal Rondon, assinada pela senhora Consuelo Luiza Lucas, diretora do referido Colégio. Apresenta Termo de Concordância do NRE para a Unidade Cedente assinada por Giselli Mocelin Martins Representante da CAA no NR e por Ivete Keiko Sakuno Carlos Chefia do NRE. Apresenta TALE e TCLE dentro das normativas e também apresenta folha de rosto dentro das normativas.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

De acordo com a análise realizada, com as informações constantes nos arquivos anexados e baseado na legislação vigente, verificou-se que os pesquisadores sanaram a todas as pendências anteriormente apontadas no PARECER CONSUBSTANCIADO COPEP 5.630.369, de 08 de setembro de 2022, quais sejam:

Pendência 1: Quanto ao TCLE:

a) Informar o horário de funcionamento do COPEP

Pendência atendida

b) Esclarecer, em breves palavras, o que é o COPEP.

Pendência atendida

c) Esclarecer ao participante da pesquisa que ele terá acesso aos resultados obtidos como preconiza a Resolução CNS Nº 466 de 2012, item III.3.d, que afirma que as pesquisas devem

assegurar a todos os participantes ao final do estudo, acesso gratuito e por tempo indeterminado aos resultados da pesquisa.

Pendência atendida

d) Deixar claro no TCLE que, o documento foi elaborado em duas vias e que uma delas ficará com o participante da pesquisa (Resolução CNS N° 466 de 2012, item IV.5.d). Esclarecer também que todas as páginas serão rubricadas pelo pesquisador e pelo participante.

Pendência atendida

e) Numerar as folhas do TCLE da forma: 1 de 2; 2 de 2.

Pendência atendida

f) Preferencialmente as informações acerca dos contatos devem ser apresentadas no final da página e de forma mais espaçada.

Pendência atendida

Pendência 2: Quanto ao TALE:

a) No Tale, o participante da pesquisa precisa sabe

Pendência atendida

b) Numerar as páginas do TALE.

Pendência atendida

c) Deixar claro no TCLE que, o documento foi elaborado em duas vias e que uma delas ficará com o participante da pesquisa (Resolução CNS N° 466 de 2012, item IV.5.d). Esclarecer também que todas as páginas serão rubricadas pelo pesquisador e pelo participante.

Pendência atendida

d) Informar o horário de funcionamento do COPEP.

Pendência atendida

e) Esclarecer, em breves palavras, o que é o COPEP.

Pendência atendida

f) Esclarecer ao participante da pesquisa que ele terá acesso aos resultados obtidos como preconiza a Resolução CNS N° 466 de 2012, item III.3.d, que afirma que as pesquisas devem assegurar a todos os participantes ao final do estudo, acesso gratuito e por tempo indeterminado.

Pendência atendida

Pendência 3: No caso do projeto de pesquisa em questão, a Área Temática na folha de rosto não deve ser preenchida, pois não se trata de nenhum dos temas da Resolução 466/2012-CNS, item IX.4 que estabelece os temas específicos para Áreas temáticas.

assegurar a todos os participantes ao final do estudo, acesso gratuito e por tempo indeterminado aos resultados da pesquisa.

Pendência atendida

d) Deixar claro no TCLE que, o documento foi elaborado em duas vias e que uma delas ficará com o participante da pesquisa (Resolução CNS N° 466 de 2012, item IV.5.d). Esclarecer também que todas as páginas serão rubricadas pelo pesquisador e pelo participante.

Pendência atendida

e) Numerar as folhas do TCLE da forma: 1 de 2; 2 de 2.

Pendência atendida

f) Preferencialmente as informações acerca dos contatos devem ser apresentadas no final da página e de forma mais espaçada.

Pendência atendida

Pendência 2: Quanto ao TALE:

a) No Tale, o participante da pesquisa precisa sabe

Pendência atendida

b) Numerar as páginas do TALE.

Pendência atendida

c) Deixar claro no TCLE que, o documento foi elaborado em duas vias e que uma delas ficará com o participante da pesquisa (Resolução CNS N° 466 de 2012, item IV.5.d). Esclarecer também que todas as páginas serão rubricadas pelo pesquisador e pelo participante.

Pendência atendida

d) Informar o horário de funcionamento do COPEP.

Pendência atendida

e) Esclarecer, em breves palavras, o que é o COPEP.

Pendência atendida

f) Esclarecer ao participante da pesquisa que ele terá acesso aos resultados obtidos como preconiza a Resolução CNS N° 466 de 2012, item III.3.d, que afirma que as pesquisas devem assegurar a todos os participantes ao final do estudo, acesso gratuito e por tempo indeterminado.

Pendência atendida

Pendência 3: No caso do projeto de pesquisa em questão, a Área Temática na folha de rosto não deve ser preenchida, pois não se trata de nenhum dos temas da Resolução 466/2012-CNS, item IX.4 que estabelece os temas específicos para Áreas temáticas.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

Continuação do Parecer: 5.710.000

Pesquisador Responsável	carta_apresentacao_orientador.pdf	06/06/2022 14:40:44	Marcelo Carlos de Proença	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	Aceite_Diretor.pdf	06/06/2022 14:38:42	Marcelo Carlos de Proença	Aceito
Declaração de concordância	Concordancia_NRE.pdf	06/06/2022 14:38:17	Marcelo Carlos de Proença	Aceito

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

MARINGÁ, 21 de Outubro de 2022

Assinado por:
Maria Emilia Grassi Bueto Miguel
(Coordenador(a))

Endereço: Av. Colombo, 5790, UEM-PPG, sala 4
Bairro: Jardim Universitário **CEP:** 87.020-900
UF: PR **Município:** MARINGÁ
Telefone: (44)3011-4597 **Fax:** (44)3011-4444 **E-mail:** copep@uem.br